



TITLE:

走行荷重に対する道路けた橋の動的性状に関する研究(  
Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

小堀, 為雄

---

CITATION:

小堀, 為雄. 走行荷重に対する道路けた橋の動的性状に関する研究. 京都大学, 1968, 工学博士

ISSUE DATE:

1968-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r1199>

RIGHT:

走行荷重に対する道路けた橋の  
動的性状に関する研究

昭和42年9月

小堀為雄

走行荷重に対する道路けた橋の  
動的性状に関する研究

小 堀 為 雄

# 走行荷重に対する道路けた橋の 動的性状に関する研究

小 堀 為 雄

## 目 次

第 1 章	総 論	1
1.1	概 説	1
1.2	道路橋の衝撃係数に対する従来考え方	1
1.3	走行荷重による道路橋の動的応答に関する従来の理論的実験的研究	3
1.4	本論文の概要	6
第 2 章	不規則振動論による道路橋の動的応答	13
2.1	概 説	13
2.2	運動方程式と等価振動系	13
2.2.1	運 動 方 程 式	13
2.2.2	等価振動系 (Equivalent system)	15
2.3	不規則外力に対する動的応答の計算	16
2.3.1	各振動系の伝達関数とパワースペクトル密度	17
2.3.2	数 値 計 算	20
2.3.3	計算結果の考察	24
2.4	同時に多くの不規則外力が作用した場合の動的応答	25
2.4.1	2台の自動車と同時に載荷した場合	26
2.4.2	数台の自動車と同時に載荷した場合	27
2.5	載荷台数による動的係数の通減率	27
第 3 章	シミュレーションによる道路橋の動的応答と 2, 3 の実験	37
3.1	概 説	37
3.2	ランダム自動車荷重列のシミュレーション	37
3.2.1	調 査	37

3.2.2	ランダム自動車列模型の作成	41
3.3	基本運動方程式と計算式	43
3.4	単一荷重による動的応答	46
3.5	ランダム自動車荷重列による動的応答	49
3.6	走行荷重による振動実験の2,3の結果	52
第 4 章	連続形式橋りょうの固有振動モードと動的応答	66
4.1	概 説	66
4.2	各種けた橋の固有周期とそのモード	66
4.3	連続けた橋の動的応答	67
4.3.1	走行自動車による動的応答	67
4.3.2	基本計算式	69
4.3.3	数値計算	73
4.3.4	実験例	75
4.3.5	考 察	76
4.4	ヒンジを有するけた橋の応答	77
4.4.1	理論式の誘導	78
4.4.2	数値計算	79
4.4.3	模型実験	79
4.4.4	考 察	79
第 5 章	橋りょう設計上の動的問題点に対する考察	95
5.1	概 説	95
5.2	スパン長と動的係数の遞減率	96
5.3	スパン長と動的係数	97
5.4	設計活荷重に対する動的係数	98
5.5	連続けた橋とゲルバーけた橋の動的係数	100
5.6	たわみと橋けたの振動	101
5.7	その他の問題	104
5.8	設計動的係数の提案	104
第 6 章	結 論	109

この論文の基礎となった論文 .....	114
謝 辞 .....	115
A.1 衝撃係数と動的係数について .....	117
A.2 走行自動車と橋けたの運動方程式より各変数間の関係を求める .....	120
A.3 走行荷重による道路橋の動的応答のパワースペクトル密度 $S_y(\omega)$ を求めるプログラム .....	123
A.4 乱数の発生とランダム自動車列の車頭間隔を作成するサブプログラム .....	124
A.5 (a) 琵琶湖大橋の固有周期と固有関数を求めるメインプログラム (〔FMB〕使用例) .....	125
(b) 各種けた橋の固有周期と固有関数を求めるサブプログラム〔FMB〕.....	126



# 第1章 総 論

## 1.1 概 説

道路橋の設計外力としては周知のとおり、自動車などによる活荷重、地震荷重、風荷重などがあげられるが、これらの荷重はいずれも不規則な変動荷重である。地震荷重や風荷重は特に長大橋で問題となり、現在種々の研究がなされている。一般に中スパン以下の道路橋では自動車などによる活荷重が問題となる。しかし、この活荷重もわが国の経済成長とあいまって、自動車交通量の増大や車体の大型化および車種の増加、速度の上昇などから日々にその様相を転じている。

一方、最近の橋りょう技術や構造用材料の進歩によって、道路橋自体の形式もマッシブなものからスレンダーなものへと変わりつつある傾向にある。このような現状にあるので、今一度道路橋の外力としての自動車荷重の動的特性を正しく調査し、それに十分に対処できるように橋りょうは設計されなければならない。

本研究では外力としての自動車荷重の動的特性を把握し、この動的荷重に対する道路橋の動的応答を検討して設計の合理化に資することを目的としている。

以下に従来の研究と本研究の概略を述べる。

## 1.2 道路橋の衝撃係数に対する従来の考え方

道路橋の活荷重である走行中の自動車荷重は次のような点から不規則な動的外力であるといえることができる。

- 1) 車種および重量が一定でない。
- 2) ある荷重列をなして走行しているが、その重量、車頭間隔はランダムである。
- 3) 自動車の車体は弾性支持されており、路面の凹凸によって振動し、その慣性力はばねを通して路面に動的圧力をおよぼす。その路面の凹凸が不規則であるので自動車の振動もまた不規則である。
- 4) 荷重の作用点が時間とともに変化する。

このように不規則な変動荷重を有する自動車がある時は数台、ある時は数十台と連をなして橋りょう上を走行するのであって、これらの個々の問題を橋りょうの設計に考慮することは困難である。このことから従来はこれら動的影響をすべて衝撃荷重として、設計活荷重を割り増すことによって、その影響を設計に考慮してきている。その割り増し量、すなわち、設計活荷重に対する衝撃荷重の比は周知のとおり衝撃係数と呼ばれる。わが国の現行示方書では、これをスパン長に対する単調減少関数として表わしている。

わが国をはじめアメリカ、ドイツおよびイギリスなど各国でとられている衝撃係数を図 1.1 に示した。いずれの示方書においても衝撃係数はスパン長に対する単調減少関数として表わされている。これらは主として実験結果や活荷重との関連から経験的に定められたものが多いといわれる。

著者は、これらの示方書とは別の考え方から橋りょうの走行荷重による動的応答を計算し、橋りょう設計上の動的諸問題について考察して、新しく合理的な動的係数<sup>A.1</sup>なる形で導き、結果的には示方書にとられているように、スパン長に対する単調減少関数として表わしてよいことを立証した。その詳細は後章に述べるとおりである。いずれにしても、道路橋の動的係数はスパン長と密接な関係にある。しかし、その大きさは各国の交通事情や、経済事情にもよるようであり、結果的には非常に異なっている。また、動的効果の大きいとされている鉄道橋においても種々の実験結果からいくつかの変遷を経て今日にいたっている。道路橋においては、昭和 31 年に鋼道路橋設計示方書の大改正が行なわれ、このとき設計活荷重は変わったにもかかわらず、衝撃係数は従来どおりとされている。これらのことがらを合わせて考えると、いまだ衝撃係数の合理的な決定法がなく、未解決の点が多いことを意味しているものと解される。

さて、設計衝撃係数は前述のように設計活荷重に対するものであるので、この点から設計にとられている活荷重をまず検討する必要がある。いま現行示方書にとられている荷重と対応するために文献 1) にあげられている自動車列(車頭間隔  $a$ )と同じ曲げモーメントを生ずる等分布荷重<sup>\*</sup>の値を図 1.2 に示した。この図から等分布荷重が等しくてもそれに対応する自動車の間隔がスパン長によって異なっていることがわかる。たとえば、自動車の重量を 20 ton とし等分布荷重が  $350 \text{ kg/m}^2$  となるような自動車列を求めて見ると、スパン長 30 m で車頭間隔 5 m、スパン長 50 m で 7 m、スパン長 80 m で 9 m、スパン

は約                      車頭間隔は約                      車頭間隔は約

---

\* 自動車列および等分布荷重は、いずれも満載荷重を考える。



車頭間隔は約  
長140mで11mとなつて、スパン長が短い橋りょうについては長い橋りょうに比べて荷重のとり方が大きい傾向となっている。このように、示方書にとられている設計活荷重は実際の自動車交通に比べると非常に密に載荷した場合に相当する値であることがわかる。しかし、このことについては確率統計的に整理されなければならない問題であつて、ここではとりあえずこの示方書にとられている活荷重を対象として解析を進めることにする。

また、示方書では橋けたの剛性を規制することから、たわみ制限の規定が設けられている。この規定は、自動車の走行安全性およびたわみの増加による部材の2次応力の緩和から設けられたものであるが、一方では橋けたの動力学的安定性を期待した規定であるとも考えられる。このことから、本論文の第5章でこのことについて若干の考察を加える。

以上、従来はスパン長による単調減少関数として設計衝撃係数を経験的に定め、この衝撃係数を設計活荷重に乗じた値を衝撃荷重とし、これを外力の動的影響の代り<sup>や</sup>に用いてきたということが出来る。

### 1.3 走行荷重による道路橋の動的応答に関する従来の理論的実験的研究

橋りょうの衝撃問題に関する研究は古くから行なわれ、主として衝撃効果の大きい鉄道橋を対象に行なわれて来た。

まず、鉄道橋の蒸気機関車を対象に行なわれた研究の代表的なものをあげる。(これらに関する紹介は文献2)～6)など多くの文献にあげられているのでその概略のみを述べる。)

1) けたの質量を無視したもの Willis (1849)<sup>7)</sup>, Stokes (1849)<sup>8)</sup> などがこれに属し、この場合はけたの動たわみ曲線は静たわみ曲線に相似となり、外力として荷重の質量の慣性力を加えた値を用いれば、容易にけたの動たわみ曲線を求めることができる。

2) けたの質量に比べて荷重の質量が小さいとして、荷重の質量を無視したもの Timoshenko (1924)<sup>3)</sup> はけたの振動についての偏微分方程式から出発し、一定外力が移動する場合や周期力が移動する場合などについて解析し、橋りょうの衝撃問題を考える

上で価値ある研究をなしとげた。

3) けたおよび荷重の質量をともに考慮した場合 Inglis (1934)<sup>9)</sup>, Looney (1944)<sup>10)</sup>, 三瀬・国井 (1943)<sup>11)</sup>, Hillerborg (1951)<sup>12)</sup> などの研究がこれに属し, Inglis はけたの振動をフーリエ級数を用いて解析し, この式を Looney は step - by - step により解いた。一方, 三瀬・国井は Inglis のフーリエ級数が発散級数であることを指摘し, 楕円関数を用いて解析した。

4) 実験的研究 さきに述べたように設計衝撃係数は橋りょう上に荷重が満載された場合に対するもので, 鉄道橋ではこれに非常に近い状態で実験が可能であることから古く, 1907年頃からアメリカにおいて, 1920年頃からイギリス<sup>2), 4)</sup>において, またわが国においても昭和 3 年頃から鉄道技術研究所<sup>4), 5)</sup>を中心に多くの研究が行なわれた。しかし, これを理論的に解析することは荷重が非常に不規則であることから困難であって, 単にスパン長との関係で整理されているにすぎない。これらの実験結果は現在各国の示方書でとられている衝撃係数がスパン長の単調減少関数として表わされていることの基礎となっている。

道路橋に関する研究としては, これがはっきり道路橋であるとして現われたのは鉄道橋に対するものよりおそく, イリノイ大学の Newmark や MIT の Biggs などの研究によってであろう。

道路橋と鉄道橋とでは荷重の性質が異なり, 道路橋においては鉄道橋の蒸気機関車にみられるようなハンマー作用はなく, また自動車の重量は比較的弱いばねで支えられているので振動が大きい傾向にある。しかし個々の自動車は全く独立であって, 鉄道橋のように車両が完全に連結されてけた上を通過するのでなく, この点からある速度でしかも設計活荷重に近い荷重列状態でけた上を通過させることが困難であることから, 実験的研究のみでは設計衝撃係数を決定することは非常に困難である。

以下に代表的な研究の一部を紹介する。

5) Biggs などの研究 (1957)<sup>13)</sup>, 質量とばね (減衰を考慮せず) からなる荷重がある一定速度でけた上を走行する場合でけたの動たわみ曲線として1次振動モードのみをとっている (図 1.3)。このような系の運動方程式はスパン中点の動たわみに関する微分方程式として表わされ, これらの式を荷重が橋けたに入る際の初期条件を考慮して計算を行なっている。一方模型けたによる室内実験および実橋による野外実験<sup>な</sup>を行い, 荷重の初期条件による影響が大きいことを指摘している。

6) Newmark らの研究 (1956)<sup>14)</sup>~23) 彼等は道路橋の衝撃問題の研究として 1950 年頃から始め、その間電子計算機の出現によって画期的な進歩をもたらした。これらをすべて紹介することはできないが、その概要は図 1.4 に示すような系に対する動的応答を計算するにあたって、これまでの研究のようにけたの動たわみ曲線をけたの振動モードで展開するのでなく、けたの動たわみ曲線として集中荷重によるけたの静たわみ曲線を用い、これに時間の関数を乗じて動たわみを表わしている。これはけたが振動中でもそのひずみのスパン方向の分布が、常に直線に近い形をもっているという実験結果に基づいている。さて、このようにして導いた微分方程式を次のようなパラメータを用い、彼が考案した電子計算機のための数値計算法 (Newmark's  $\beta$  method) によって、多くの数値計算を行なっている。

計算に用いられているパラメータは、

$R$  : 荷重の重量とけたの重量との比  $0.20 \sim 0.60$

$\mu$  : けたの基本振動周期と荷重のそれとの比  $0.20 \sim 0.50$  (剛性パラメータ)

$\alpha$  : スピードパラメータ ( $=vT/2\ell$ ,  $T$  : けたの基本振動周期,  $\ell$  : スパン長,

$v$  : 荷重の速度)  $0.2 \sim 0.6$

計算結果はこれらのパラメータで整理されており、その例を図 1.5 に示した。

さらに Wen らは 2 軸車についても解析し、連続けた、ゲルバーけたについては質量を分割するなど複雑な振動問題を取り扱っている。

7) 実験的研究 近年測定技術の急速な進歩によって、新しく完成された橋りょうなどで走行振動試験が行なわれ、多くの報告がなされている。また 1960 年アメリカの AASHO で行われた road test<sup>24)</sup> に含まれて、道路橋についても多くの実物大試験けたによる大規模な実験が行なわれ、6) の場合と同じように  $R$ ,  $\alpha$  のパラメータの外に  $\phi$  ( $=1$  車軸のもつ自由振動数/橋けたの自由振動数) および  $s/\ell$  ( $=$  車軸間隔/スパン長) の 4 つのパラメータで整理され、i)  $\alpha$  とともに動倍率は大きくなり、あるピークをもつ関数となり、ii) たわみの動倍率よりひずみのそれが小さくなることを示し、iii) 橋けたの動的応答は計算結果とよく一致するなどの結果を報告している。

以上その代表的なものを紹介したが、これらは、1 台の自動車によるけたの振動を解析したものでこれ自体としては有意義であるが直接道路橋の衝撃係数を決定することはできない。なぜならば何回か述べたように、設計衝撃係数は自動車が比較的密に載荷した場合の活荷重に対する値であって、この場合は、自動車の車頭間隔が小さいので走行速度を大

きくすることができない。また荷重が同時に数台載荷すると相互の振動の位相差や相互の荷重のダイナミックダンパー作用などによって振動が小さくなるからである。著者が行なった2.3の実験結果からも1台の自動車が走行した場合の橋けたの動たわみと静たわみの比より、2台、3台と荷重の数が多くなった場合の比は小さくなることが認められている。このことについて、さきに著者を含めて小西・山田・篠塚（昭和34年）<sup>25)</sup>によって確率論的立場から考察を加えた。このことが本論文における考え方の基本的事項となっている。

#### 1.4 本論文の概要

以上のように道路橋の活荷重は不規則な変動外力であり、その応答であるけたの振動もまた不規則な振動である。このような不規則な振動をスペクトル解析の手法を用いて解析し、活荷重による動的影響をより合理的に橋りょう設計に取り入れることが本論文の主目的である。

このように不規則な外力による動的応答については、ある特殊な場合についてのみ検討した結果を設計に直接用いることは危険であるから、このような場合にはわれわれは長時間の記録からその特性を見だし、確率過程として、この振動問題を取り扱う必要がある。（第2章 不規則振動論による道路橋の動的応答はこの方法によっている）。

このことから本論文では自動車荷重列の個々の自動車の振動は互に独立な不規則振動であるとする。しかしその振動のパワースペクトル密度を求めると各自動車とも等しい値をもっているとして、この不規則な振動外力による橋けたの動的応答を求める立場をとる。一方設計活荷重は自動車が非常に密に載荷した場合の自動車の重量に対する値であるから、自動車列として大型トラックが数十台列をなして橋りょうを通過する場合の橋けたの動的応答について解析し、その結果から載荷台数が多くなると、その合成振動としての橋けたの動的応答は小さくなることを述べ、載荷台数による逓減率を計算し、さらに同時に載荷する自動車荷重台数と橋りょうのスパン長が密接な関係にあることから、スパン長に対する合成振動の動的係数の逓減率を導き、この逓減率をもとにして、合理的な動的係数を求める。この動的係数（動的係数に1を加えたものを動倍率という）が最終的には現行示方書という衝撃係数を意味することになり、結論として現行設計示方書にとられている衝撃係数（本論文では設計動的係数）の理論的裏づけを行ない、さらに合理的な設計動的係数を導

く ことができた。

この新しく導きだされた設計動的係数について、荷重列をランダム荷重列として、電子計算機の中でシミュレートされた荷重列による動的応答を数値積分法によって計算し、その結果からも新しく提案した設計動的係数が妥当であることを立証し（第3章 シミュレーションによる動的応答）さらに2, 3の実験結果からもその裏づけを行なった。

さらに、単純けた橋以外のたとえば連続けた橋、ゲルバーけた橋についても若干の考察を加えた（第4章 連続形式橋りょうの振動モードと動的応答）。

最終段階（第5章）で道路橋設計上の動的諸問題（載荷台数と動的係数の遞減率、スパン長と動的係数の遞減率、設計動的係数、連続形式のけた橋の動的係数や、たわみと橋けたの振動等）についてこの研究の結果をもとに著者の見解を述べた。

この研究の結果のうちおもなものをあげる。

1) 走行荷重による橋けたの動的特性は橋けたの振動特性（固有周期、その固有関数（モード）および減衰定数等）がわかれば走行荷重のもつ上下振動のパワースペクトル密度から不規則振動論を用いて比較的簡単に求めることができる。

2) 道路けた橋の設計動的係数はスパン長に対する単調減少関数として表わすことができる。

3) 橋けたの固有周期と固有関数（モードは transfer matrix 法を用いると簡単に短時間で求めることができる）。

## 参 考 文 献

- 1) 川崎偉志夫：道路橋の荷重について、鋼橋設計示方書とプレストレスコンクリート指針，79/92，土木学会，昭30。
- 2) Bleich, F. : Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Julius Springer, 1924.
- 3) Timoshenko, S. : Vibration Problems in Engineering, Third Edition, Van Nostrand, 1955.
- 4) 橋本香一：鉄道橋の衝撃，鋼橋設計示方書とプレストレスコンクリート指針，19/38，土木学会，昭30。
- 5) 大地羊三：鉄道橋の衝撃係数，鉄道技術研究報告, No. 370 (昭38)。

- 6) 喜内敏：梁及び版の撓み振動について，金沢工業専門学校学術報告，第4集  
(昭25)。
- 7) Willis, R.: Appendix to the Report of the Commissioner appointed to inquire into the application of Iron to Railway Structures, London, 1849.
- 8) Stokes, G.G.: Discussion of a Differential Equation Relating to the Breaking of Railway Bridges, Trans. Comb. Phil. Soc. 8, 1849.
- 9) Inglis, C.E.: A Mathematical Treatise on Vibration in Railway<sup>Bridges</sup>, Cambridge, 1934.
- 10) Looney, C.T.G.: Impact on Railway Bridges, Univ. of Illinois Engineering Experiment Station, Bull. Series, No. 352 (1944).
- 11) 三瀬幸三郎，国井修二郎：走行荷重による橋桁の強制振動論，九州大学弾性工学研究所報告，vol. 1, No. 1, 1/52 (昭18)。
- 12) Hillerborg, A.: Dynamic Influences of Smoothly Running Loads on Simply Supported Girders, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1951.
- 13) Biggs, J.M. Suer, H.S. and Louw, J.M.: The Vibration of Simple-span Highway Bridges, Proc. of ASCE, Vol. 83, ST2, 1186-1/32, (1957).
- 14) Tung, T.P., Goodman, L.E., Chen, T.Y. and Newmark, N.M.: Highway-Bridge Impact Problems, Highway Research Board Bull. No. 124, 111/133, 1956.
- 15) Ayre, R.S., Jacobsen, L.S. and Hsu, C.S.: Transverse Vibration of One- and of Two-Span Beams under the Action of a Moving Mass Load, Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, 1/12 (1950).
- 16) Yamada, Y. and Veletsos, A.S.: Free Vibration of

- Simple Span I-Beam Bridges, 8th progress Report, Highway Bridge Impact Investigation, Univ. of Illinois, 1950.
- 17) Wen, R.K.L.: Dynamic Behavior of Simple Span Highway Bridge Traversed by Two-Axle Vehicles, Univ. of Illinois, Civil Engineering Structural Research Series (CESRS) No.142, 1957.
- 18) Wen, R.K.L.: Dynamic Responses of Beams Traversed by Two-Axle Loads, Proc. of ASCE, Vol.86, EM5, 91/111. (1960).
- 19) Huang, T. and Veletsos, A.S.: Dynamic Response of Three Span Continuous Highway Bridges, Univ. of Illinois, (CESRS) No.190, 1960.
- 20) Oran, C. and Veletsos, A.S.: Analysis of Static and Dynamic Response of Simple-Span, Multigirder Bridges, Univ. of Illinois, (CESRS) No.221, 1961.
- 21) Wen, R.K.L.: Dynamic Behavior of Cantilever Bridges, Proc. of ASCE, Vol.88, EM4, 27/43, (1962).
- 22) Walker, W.H. and Veletsos, A.S.: Response of Simple-Span Highway Bridges to Moving Vehicles, Univ. of Illinois (CESRS) No.272, 1963.
- 23) Ramirez, J.A.N. and Veletsos, A.S.: Response of Three-Span Continuous Highway Bridges to Moving Vehicles, Univ. of Illinois, (CESRS) No.276, 1964.
- 24) The AASHTO Road Test, Highway Research Board, Special Report 73, National Academy of Sciences-National Research Council 1962.



- 25) 小西一郎・山田善一・篠塚正宜・小堀為雄：橋の衝撃係数に関する確率論的考察，  
土木学会論文集，No.62，1／5，（昭34）。

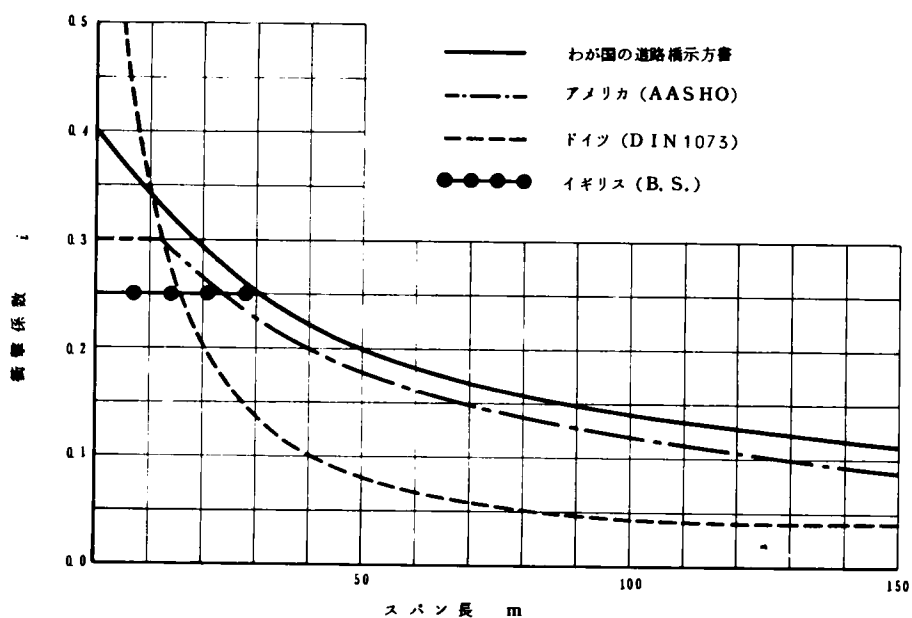


図 1-1 各国の示方書にとられている衝撃係数

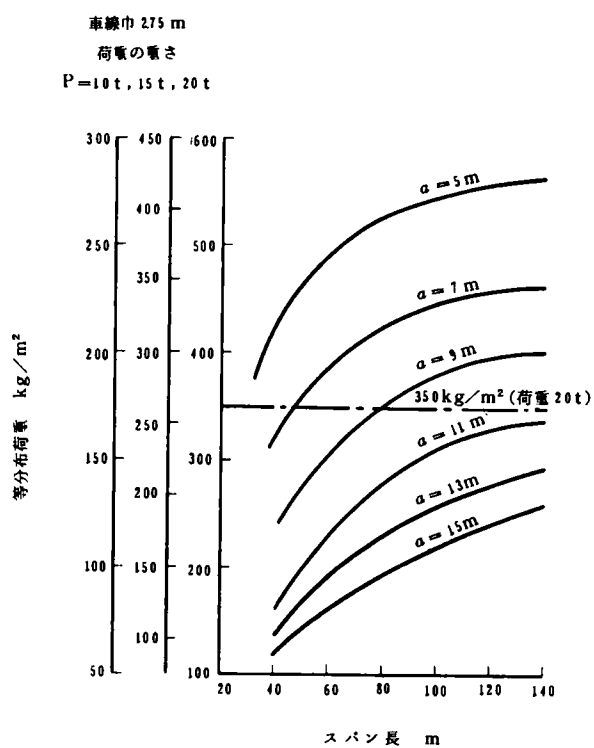


図 1-2 自動車荷重列 (車頭間隔  $a$ ) と同じ曲げモーメントを生ずる等分布荷重 (一等橋)

(文献 1) より引用)

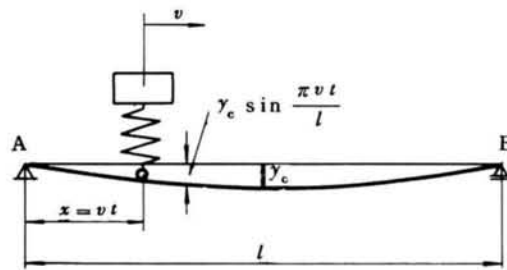


図 1.3 振 動 模 型

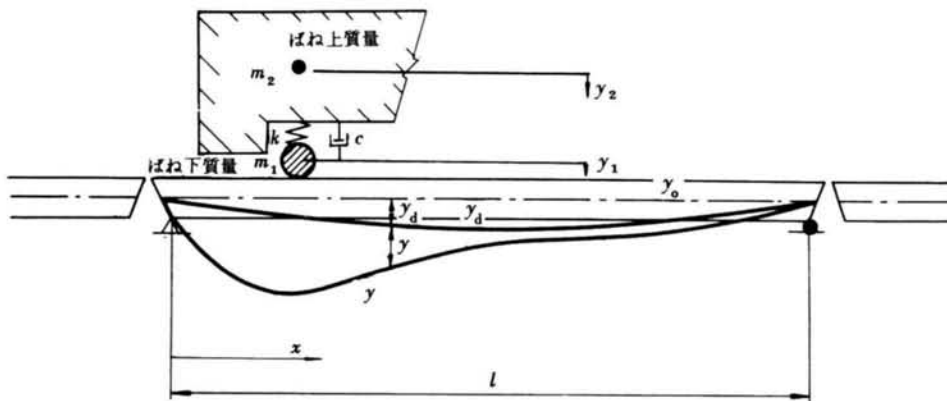


図 1.4 Newmark の振動模型

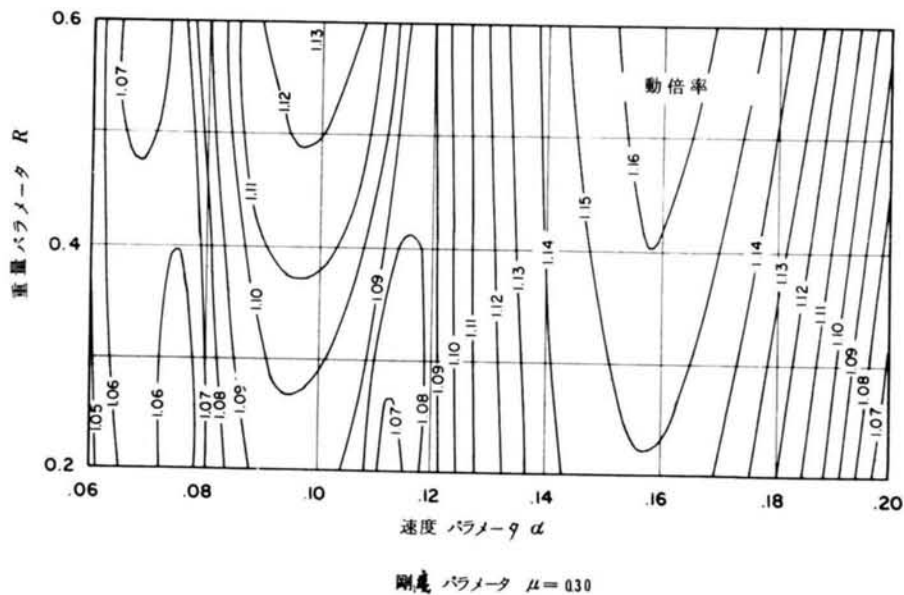


図 1.5 Newmark の解析結果

速度と重量パラメータに対する等動倍率線

## 第2章 不規則振動論による道路橋の動的応答

### 2.1 概 説

1.1で述べたように橋りょう上を走行する自動車の振動は不規則である。このような不規則な自動車の振動による橋りょうの振動をこれまでの研究のように、ある特殊な場合について解析した結果のみからこれを論ずることは危険である。このような場合は、われわれは長時間の記録から確率統計的に論じなければならない。

このような不規則な振動を解析する手法の一つに不規則振動論があることはすでに知られている。この章では不規則振動論を用いて、数台の自動車が同時に載荷した場合の橋けたの動的応答について解析する。

解析にあたっては、設計活荷重を対象にしていることから、自動車荷重列としては同種の比較的大重量のトラック車が等間隔で、しかも一定速度で走行している場合を考える。この時、それぞれの自動車の振動のパワースペクトル密度の分布は等しいが、しかし互に相関性はなく、全く独立であるとして解析を進める。

本章の結果として、自動車の載荷台数による動的係数の逓減率を求め、ひいてはその載荷台数が橋りょうのスパン長と密接な関係があることからスパン長による動的係数の逓減率を提案しようとするものである。

なお、この章では基本振動のみを取り扱っているが、高次振動については連続けた橋などの場合に問題となるのでこれについては第4章で改めて論ずることにする。

### 2.2 運動方程式と等価振動系

自動車の振動系については、種々の模型が作られているが、ここでは図2.1に示す2自由度系として解析を進める。橋けたは多自由度系であるので解析を単純化し、明確にするために次に述べるような等価振動系として考える。

#### 2.2.1 運動方程式

自動車と橋けたの振動模型を図2.1のように考える。この系の運動方程式は従来多くの

研究者によって提案されているが、ここでは Timoshenko<sup>1)</sup>や Biggs<sup>2)</sup> などによって導かれた最も単純な方法を用いる。すなわち、単純ばりの2次以上の高次振動の影響を無視すると、その動たわみ曲線  $y$  は次式で与えられる。

$$y = \frac{q(t)}{K} \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (2.1)$$

ここに、 $\ell$  は橋けたのスパン長、 $K$  は橋けたの剛性に関するパラメータであり、ここでは  $(\pi/\ell)^4 EI \ell/2$  を用いている。また、 $q(t)$  は時間のみに関係する関数であり、一般座標にとられることが多く、 $x$  は橋けたの一方の支点上を原点にとった橋けたの水平方向の座標である。ここで問題を簡単にするために単純ばりの一次振動のみを取り上げたが、式(2.1)の形を適当に選ぶことにより、他の支承条件の場合や、高次振動が問題となる長スパンの連続形式の橋りょうに理論を拡張することも可能であり、そのことについては第4章で若干の考察が行なわれている。

さて、橋けたの動たわみ曲線を式(2.1)のように表わして、エネルギー法から図2.1の Vehicle - bridge system の運動方程式を求める。

Vehicle - bridge system の全位置エネルギー  $V$ 、運動エネルギー  $T$  および減衰関数  $D$  は次式のように表わされる。

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^{\ell} (y'')^2 dx + \frac{1}{2} k_s (z - z_T)^2 + \frac{1}{2} k_T (z_T - y_v)^2 - mgz - m_T gz_T \quad (a)$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{w}{g} \int_0^{\ell} \dot{y}^2 dx + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m_T \dot{z}_T^2 \quad (b)$$

$$D = \frac{1}{2} c \int_0^{\ell} \dot{y}^2 dx + \frac{1}{2} c_s (\dot{z} - \dot{z}_T)^2 + \frac{1}{2} c_T (\dot{z}_T - \dot{y}_v)^2 \quad (c)$$

これらの式を Lagrange の運動方程式に入れて整理すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{w\ell}{2Kg} \ddot{q} + \frac{\beta w\ell p_0}{Kg} \dot{q} + \frac{EI\ell}{2K} \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 q \\ - \{ k_T [z_T - y_v] + c_T [\dot{z}_T - \dot{y}_v] \} \sin \frac{\pi x}{\ell} = 0 \\ m \ddot{z} + k_s (z - z_T) + c_s (\dot{z} - \dot{z}_T) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$m_T \ddot{z}_T + k_s (z_T - z) + c_s (\dot{z}_T - \dot{z}) \\ + k_T (z_T - y_v) + c_T (\dot{z}_T - \dot{y}_v) = 0$$

ここに、 $\beta$ は橋けたの減衰定数であって式( c )の減衰係数 $c$ とは $c = 2\beta \frac{w}{g} p_0$ の関係がある。 $w$ および $p_0$ はそれぞれ橋けたの単位長さ当りの重量および固有円振動数を、 $m$ および $m_T$ は自動車のばね上およびばね下質量を、 $k_s$ および $c_s$ は懸架部のばね定数および減衰係数を、 $k_T$ および $c_T$ はタイヤ部のばね定数および減衰係数をそれぞれ示し、 $z$ および $z_T$ は自動車のばね上質量およびばね下質量のそれぞれの変位を示している。

式( 2.2 )において、自動車のタイヤは必ず路面に接触しているとすれば、

$$y_v = y(t, vt) + z_0(t) \quad (2.3)$$

として表わされる。ここに $y_v$ は橋けたおよび橋面の凹凸を含めたタイヤ接地面の鉛直変位、 $y(t, vt)$ は荷重作用点のけたの鉛直変位、 $z_0$ はその点における橋面の凹凸をそれぞれ表わしている。

## 2.2.2 等価振動系 (Equivalent system)

式( 2.2 )において支点から $X$ なる距離にある点を考える。この場合点 $X$ のけたの動たわみは式( 2.1 )より

$$y_x = \frac{q(t)}{K} \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (2.4)$$

と表わされる。このことから式( 2.2 )の両辺に $\sin(\pi x/\ell)$ を乗ずることによって点 $X$ の運動方程式が導かれる。

$$\frac{w\ell}{2g} \ddot{y}_x + \frac{\beta w\ell p_0}{g} \dot{y}_x + \frac{EI\ell}{2} \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 y_x \\ - \{ k_T (z_T - y_v) + c_T (\dot{z}_T - \dot{y}_v) \} \sin \frac{\pi x_l}{\ell} \cdot \sin \frac{\pi X}{\ell} = 0 \quad (2.5)$$

上式の $y_x$ 、 $\dot{y}_x$ および $\ddot{y}_x$ に関する係数をそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} M_E &= w \ell / 2 g \\ c_E &= \beta w \ell p_0 / g \\ k_E &= (E I \ell / 2) (\pi / \ell)^4 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

とすれば、式(2.5)は図2.1の(b)振動系の運動方程式を表わすことになる。そこでこの系を Vehicle bridge system の等価振動系 (Equivalent system) とみなす。

したがって以後の解析は等価振動系 (Equivalent system) について論ずる。

### 2.3 不規則外力に対する動的応答の計算

説明の便宜上等価振動系の運動方程式(2.5)の任意点Xおよび荷重の載荷点 $\alpha$ をともにスパン中点に選ぶことにする。この時の等価振動系の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} M_E \ddot{y}_c + c_E \dot{y}_c + k_E y_c - \{ k_T (z_T - y_v) + c_T (\dot{z}_T - \dot{y}_v) \} &= 0 \\ m \ddot{z} + k_s (z - z_T) + c_s (\dot{z} - \dot{z}_T) &= 0 \\ m_T \ddot{z}_T + k_s (z_T - z) + c_s (\dot{z}_T - \dot{z}) + k_T (z_T - y_v) \\ + c_T (\dot{z}_T - \dot{y}_v) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

として表わされる。

いま、この振動系の  $y_c$ 、 $z$  または  $z_T$  のいずれか一つの変位に振動を与えるとすれば、この振動によって他の二つの変位は振動を誘起される。しかし、道路橋上を走行する自動車によるこの種の振動はいずれの振動変位も独立ではなく互に連成した振動である。そこでまず等価振動系の  $M_E$  を完全に剛体支持された図2.1の Vehicle system について、(i)入力関数として路面の凹凸の波形  $z_0$  を選ぶ、この  $z_0$  によって  $z_T$  および  $z$  は振動する。(ii)これらの振動に自動車のエンジンによる振動や自動車の走行中のふつり合による振動などが加算された不規則な振動が Equivalent system の入力関数となり、これらの振動による  $y_c$  の振動が Equivalent system の応答関数として求められる。(iii)この  $y_c$  の振動に  $z_0$  が加算された値が再び Vehicle system の入力関数となるのである。このようなくり返し計算によって  $y_c$  の値を計算することができよう。しかし実際の計算では、自動車のエンジンによる振動や走行中のふつり合による振動などはこれまでの研究<sup>3)</sup>では走行中の自動車の振動に与える影響は小さいことが立



証されているので、本論文では走行中の自動車の振動は主として橋面の凹凸からの不規則振動である\*とする。このことから入力関数として  $z_0$  のみを選び式(2.7)を連立方程式として解くことにする。

ところで、橋面の凹凸の波形  $z_f$  を知ることは困難であり、またこの波形は不規則な波形である。幸い川合、森崎<sup>4)</sup>\*\* によって幾つかの橋面の凹凸のパワースペクトル密度が求められている。そこでこの振動系に不規則振動論の手法を用いることを試みる。

### 2.3.1 各振動系の伝達関数とパワースペクトル密度<sup>10)~15)</sup>

まず、各振動系の伝達関数を求める。

(a) Vehicle system の伝達関数 (一般路面走行中)

この振動系の運動方程式は式(2.7)<sub>2</sub> および式(2.7)<sub>3</sub> であり、 $y_v$  を  $z_0$ 、 $\dot{y}_v$  を  $\dot{z}_0$  とすればよい。いま、 $z(t)$ 、 $z_T(t)$  および  $z_0(t)$  のフーリエ変換をそれぞれ  $Z(j\omega)$ 、 $Z_T(j\omega)$  および  $Z_0(j\omega)$  とし、

$$z(0) = z_T(0) = z_0(0) = \dot{z}(0) = \dot{z}_T(0) = \dot{z}_0(0) = 0$$

とする。この時、定常状態における式(2.7)<sub>2</sub> および式(2.7)<sub>3</sub> は、

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 m Z(j\omega) + k_s (Z(j\omega) - Z_T(j\omega)) \\ + j\omega c_s (Z(j\omega) - Z_T(j\omega)) = 0 \\ (j\omega)^2 m_T Z_T(j\omega) + k_s (Z_T(j\omega) - Z(j\omega)) \\ + j\omega c_s (Z_T(j\omega) - Z(j\omega)) + k_T (Z_T(j\omega) - Z_0(j\omega)) \\ + j\omega c_T (Z_T(j\omega) - Z_0(j\omega)) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

上式から  $Z_T(j\omega)$  を消去して、 $Z(j\omega)$  について解けば

\* 自動車の振動の代表として橋面の凹凸による振動を選んだが、他の振動もこの振動中に含めて考えてもよい。具体的には凹凸のパワースペクトル密度に他の振動のパワースペクトル密度を含めればよい。

\*\* 走行中の自動車の振動にスペクトル解析を応用した研究はわが国では文献5)~9)などがある。

$$Z(j\omega) = \frac{\frac{1}{mm_T} \{ (j\omega)^2 c_s c_T + j\omega (k_s c_T + k_T c_s) + k_s k_T \}}{(j\omega)^4 + (j\omega)^2 \left( \frac{c_s + c_T}{m_T} + \frac{c_s}{m} \right) + (j\omega)^2 \left( \frac{k_s + k_T}{m_T} + \frac{k_s}{m} + \frac{c_s c_T}{mm_T} \right)} \\ + \frac{j\omega}{mm_T} (k_s c_T + c_s k_T) + \frac{k_s k_T}{m m_T} Z_0(j\omega) \quad (2.9)$$

さらに、両辺をパワースペクトル密度  $S_z(\omega)$  および  $S_{z_0}(\omega)$  で表わせば

$$S_z(\omega) = \overline{H_v(j\omega)} \cdot H_v(j\omega) S_{z_0}(j\omega) \\ = |H_v(j\omega)|^2 S_{z_0}(\omega) \quad (2.10)$$

となる。ここに、 $H_v(j\omega)$  は伝達関数と呼ばれ

$$H_v(j\omega) = \frac{\frac{1}{mm_T} \{ k_s k_T - \omega^2 c_s c_T + j\omega (k_s c_T + k_T c_s) \}}{\{ \omega^4 - \omega^2 \left( \frac{k_s + k_T}{m_T} + \frac{k_s}{m} + \frac{c_s c_T}{mm_T} \right) + \frac{k_s k_T}{mm_T} \} + j \left\{ \left( \frac{k_s c_T + c_s k_T}{mm_T} \right) \right.} \\ \left. - \omega^2 \left( \frac{c_s + c_T}{m_T} + \frac{c_s}{m} \right) \right\} \omega} \quad (2.11)$$

であり、 $\overline{H_v(j\omega)}$  は  $H_v(j\omega)$  の共役複素数である。

(b) Equivalent system の伝達関数

次に Equivalent system の各関数間の伝達関数は(a)の場合と同様に式(2.7)のフーリエ変換から求めることができる。ここでは  $y_v(t)$  は

$$y_v(t) = y_c(t) + z_0(t) \quad (2.12)$$

として表わされていることに注意しながらフーリエ変換し、それらの式を連立方程式として各関数間の伝達関数を求めればよい<sup>A.2</sup>。

この場合の伝達関数は次の記号を用いて表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} J_1(j\omega) &= (-\omega^2 M_E + k_E + k_T) + j\omega (c_E + c_T) \\ J_2(j\omega) &= k_T + j\omega c_T \\ J_3(j\omega) &= k_s + j\omega c_s \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} J_4(j\omega) &= (-\omega^2 m + k_s) + j\omega c_s \\ J_5(j\omega) &= (-m_T \omega^2 + k_s + k_T) + j\omega(c_s + c_T) \end{aligned} \right\}$$

$y_c(t)$  と  $z_0(t)$  との間の伝達関数は

$$H_{yz_0}(j\omega) = \frac{J_2(j\omega) \{ J_3^2(j\omega) - J_4(j\omega) \cdot J_5(j\omega) + J_2(j\omega) \cdot J_4(j\omega) \}}{J_1(j\omega) \{ -J_3^2(j\omega) + J_4(j\omega) \cdot J_5(j\omega) \} - J_2^2(j\omega) \cdot J_4(j\omega)} \quad (2.14)$$

また,  $z(t)$  と  $z_0(t)$  との間の伝達関数は

$$H_{zz_0}(j\omega) = \frac{J_2(j\omega) \cdot J_3(j\omega) \{ J_1(j\omega) - J_2(j\omega) \}}{J_1(j\omega) \{ -J_3^2(j\omega) + J_4(j\omega) \cdot J_5(j\omega) \} - J_2^2(j\omega) \cdot J_4(j\omega)} \quad (2.15)$$

$y_c(t)$  と  $z(t)$  との間の伝達関数は

$$H_{yz}(j\omega) = \frac{J_3^2(j\omega) - J_4(j\omega) \cdot J_5(j\omega) + J_2(j\omega) \cdot J_4(j\omega)}{J_3(j\omega) \{ J_1(j\omega) - J_2(j\omega) \}} \quad (2.16)$$

さらに, 各パワースペクトル密度は

$$S_y(\omega) = \overline{H_{yz_0}(j\omega)} \cdot H_{yz_0}(j\omega) S_{z_0}(\omega) \quad (2.17)$$

$$S_z(\omega) = \overline{H_{zz_0}(j\omega)} \cdot H_{zz_0}(j\omega) S_{z_0}(\omega) \quad (2.18)$$

$$S_y(\omega) = \overline{H_{yz}(j\omega)} \cdot H_{yz}(j\omega) S_z(\omega) \quad (2.19)$$

と表わされる。

- (c) 速度パワースペクトル, 加速度パワースペクトルおよび変位パワースペクトル密度とその2乗平均値

変位のパワースペクトルは以上のようにして求められるが, この変位パワースペクトル  $S_D$  と速度パワースペクトル  $S_v$  および加速度パワースペクトル  $S_A$  の関係は次式で与えられる。

$$S_v(\omega) = |\omega|^2 S_D(\omega) \quad (2.20)$$

$$S_A(\omega) = |\omega^2|^2 S_D(\omega) \quad (2.21)$$

次に, パワースペクトル密度  $S_y(\omega)$  と2乗平均値  $\bar{y}^2$  について若干の考察を加える。  
パワースペクトル密度  $S_y(\omega)$  と自己相関関数  $R(\tau)$  とは互いにフーリエ変換で表わされ, その自己相関関数  $R(\tau)$  のパラメータ  $\tau$  が0の時の自己相関関数が2乗平均

$\bar{y}^2$  を表わす。すなわち

$$\bar{y}^2 = R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega \quad (2.22)$$

ここに、 $\bar{y}^2$  は関数  $y$  の 2 乗平均であり、もしこの過程が正規分布であり、平均値が零であるとすれば、この  $\bar{y}^2$  がこの関数の標準偏差  $\sigma$  の 2 乗、すなわち分散を意味することから、標準偏差  $\sigma$  は

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega} \quad (2.23)$$

となる。このことは関数  $y$  の振幅が少なくとも 68.27% がこの  $\sigma$  の範囲に含まれ、さらに  $2\sigma$  を考えるとすれば 95.45% がこの内に含まれることを意味している。

### 2.3.2 数 値 計 算

前項(b)では、走行中の自動車の振動は主として路面<sup>(橋面)</sup>の凹凸による振動であるとして、この凹凸のパワースペクトル密度から橋けたの変位および自動車のばね上質量の変位のパワースペクトル密度を求める関係式を導いた。これらの計算を行なうためのプログラムの例を付録 A.3 に示した。

本論文では、橋面のパワースペクトル密度として、川合、森崎<sup>4)</sup>によって求められている値を、さらに橋けたの振動は低周波数のスペクトルに対して敏感であることから図 2.2 の実線のような指数関数<sup>\*</sup>として表わされる値を用いる。すなわち

$$S_{z_r}(\Omega) = a \Omega^{-n} \quad (2.24)$$

ここに、 $n$  は両対数方眼紙上の直線の勾配を表わし、橋面によって大差はなく、 $a$  は係数で橋面の良否によって多少異なる値であることから、ここでは橋面の良否を表わすパラメ

---

\* これは橋けたの振動は低周波のパワースペクトル密度に対して敏感であることによる。また、走行中の自動車の振動に影響を与える周波数範囲では近似的に指数表示できることが報告されている。<sup>6),7)</sup>

ータと考える（橋面の平滑度パラメータという）\*。

図 2.2 の横軸の  $Q$  は路面凹凸の波長  $\lambda$  と  $Q = 1/\lambda$  の関係にあり，路面周波数と呼ばれるもので，縦軸はこの  $Q$  を変数とする路面のパワースペクトル密度  $S_{z_r}(Q)$  である。このパワースペクトル密度を Equivalent system または Vehicle system の入力関数  $z_0(t)$  のパワースペクトル密度  $S_{z_0}(\omega)$  に換算するには，走行速度  $V$  (m/sec) を一定として， $\omega = 2\pi Q V$  の関係から次の変換式を用いればよい。

$$S_{z_0}(\omega) = \frac{1}{V} S_{z_r}(Q) \quad (2.25)$$

さて，橋のスパン長  $\ell$  および減衰定数  $\beta$  をパラメータとして応答関数  $y_c$  のパワースペクトル密度および標準偏差  $\sigma$  を求める。一例としてスパン長 50 m の場合の伝達関数とけたの動的応答のパワースペクトル密度を図 2.3 に示した。また，けたの減衰定数  $\beta$  と動的応答との関係を示したのが図 2.4 であって，この図には  $\beta = 0$  における動的応答の  $\sigma$  を 100 として，他の  $\beta$  に対する  $\sigma$  を示した。

図 2.5 は横軸にスパン長  $\ell$  を縦軸に  $\sigma$ （整理の関係から静たわみで割ってある）をとって  $\beta$  をパラメータとしてプロットしたものである。

以上の計算に用いた自動車および橋けたの諸元を表 2.1 および表 2.2 に示した。なお自動車の諸元は特に周波数特性（図 2.6）が調べられているトラック車の値を採用した。

\* 橋面の平滑度パラメータ  $a$  について，今式 (2.24) を式 (2.25) に代入すれば

$$S_{z_0}(\omega) = \frac{1}{V} a Q^{-n} \quad (a)$$

となり， $n$  は一般に 2 前後であり，ここでは実測値として 1.792 をとっており，また  $Q$  と  $\omega$  とは  $\omega = 2\pi V Q$  の関係にあるので式 (a) はさらに

$$S_{z_0}(\omega) = a V^{0.792} \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^{-1.792} \quad (b)$$

と表わされる。今  $a$  を平滑度パラメータとしたのは式 (b) の速度  $V$  を一定と考えたからであるが，しかし， $V$  を標準値  $V_0$  で表わし  $V$  の変化量 ( $V_0$  に対する比) をもこの  $a$  に含めるものとするれば，パラメータ  $a$  の中に速度  $V$  の影響も同時に考慮したことになる便利である。その影響は  $V$  の変化量の 0.792 乗で作用することになる。

表2.1 自動車諸元表

		トラック車の一例		
		前 輪	後 輪	全
空 車 時 重 量 (kg)	ばね上	2,285	1,470	5,715
	ばね下	700	1,260	
積 載 時 重 量 (試験時) (kg)	ばね上	3,515	8,405	13,880
	ばね下	700	1,260	
懸 架 部	共振周波数 (cps)			3.5
	減衰係数 (kg/cm/s)	10	26	
タイヤ部	共振周波数 (cps)			13.0
	減衰係数 (kg/cm/s)	14	28	

乗車定員 3人, 最大積載量 8,000 kg, 軸距 4.8m

表2.2 道路橋のスパン長と諸元表

一車線 = 3.0 m		
スパン長 $\ell$ (m)	総重量 $W$ ( $\times 10^4$ kg)	曲剛性 $EI$ ( $\times 10^{12}$ kg $\cdot$ cm $^4$ )
20	4.84	6.21
30	7.76	12.42
40	10.68	24.41
50	13.60	42.20
60	16.52	65.78
70	19.44	80.15
80	22.36	130.31
90	25.28	171.26
100	28.20	218.01

(第3章参照)

建設省土木研究所設計合成けた橋標準設計書より概算

次に、一般路面を走行中の自動車の加速度を求める。この場合も前記のように $\sigma$ の形で整理する。また計算の便宜上次のパラメータおよび記号を用いて式(2.2)<sub>2</sub>および(2.2)<sub>3</sub>を書きかえる。

$$p_s = \sqrt{k_s/m} \quad \text{ばね上振動数 (rad/sec)}$$

$$p_T = \sqrt{k_T/m_T} \quad \text{ばね下振動数 (rad/sec)}$$

$$\beta_s = c_s/2m p_s \quad \text{懸架ばね部の減衰定数}$$

$$\beta_T = c_T/2m_T p_T \quad \text{タイヤ部の減衰定数}$$

$$R_v = m/m_T \quad \text{ばね上質量とばね下質量の比}$$

式(2.2)<sub>3</sub>の $y_v(t)$ を $z_0(t)$ として

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} + p_s^2(z - z_T) + 2\beta_s p_s(\dot{z} - \dot{z}_T) &= 0 \\ \ddot{z}_T + R_v p_s^2(z_T - z) + 2R_v \beta_s p_s(\dot{z}_T - \dot{z}) \\ + p_T^2(z_T - z_0) + 2\beta_T p_T(\dot{z}_T - \dot{z}_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

式(2.26)および(2.21)からばね上質量およびばね下質量の加速度のパワースペクトル密度はそれぞれ、

$$S_{zA}(\omega) = \omega^4 \left| \frac{J_2(j\omega) \cdot J_5(j\omega)}{(J_3(j\omega) + J_5(j\omega))J_1(j\omega) - J_4(j\omega) \cdot J_2(j\omega)} \right|^2 \cdot S_{z_0}(\omega) \quad (2.27)$$

$$S_{zTA}(\omega) = \left| \frac{J_1(j\omega)}{J_2(j\omega)} \right|^2 S_{zA}(\omega) \quad (2.28)$$

$$\text{ここに } J_1(j\omega) = -\omega^2 + p_s^2 + j 2\beta_s p_s \omega$$

$$J_2(j\omega) = p_s^2 + j 2\beta_s p_s \omega$$

$$J_3(j\omega) = -\omega^2 + R_v p_s^2 + j 2\beta_s p_s R_v \omega$$

$$J_4(j\omega) = R_v p_s^2 + j 2\beta_s p_s R_v \omega$$

$$J_5(j\omega) = p_T^2 + j 2\beta_T p_T \omega$$

として求められる。

式(2.27)および(2.28)を $R_v$ ,  $p_s$ ,  $\beta_s$ ,  $\beta_T$ および $V$ をパラメータとして数値計算を行なった。この場合接地力の動的係数を $\sigma$ の形で整理した。すなわち、ばね上



およびばね下質量の加速度を求めて互いの位相差が0となった最大点において、接地力 $F$ は、

$$F = m\ddot{z} + m_T \ddot{z}_T = (R_v \ddot{z} + \ddot{z}_T) m_T \quad (2.29)$$

として表わされ、その動的係数 $D_{cv}$ は、

$$D_{cv} = \frac{F}{W} = \frac{(R_v \ddot{z} + \ddot{z}_T) m_T}{(m + m_T) g} = \frac{R_v \ddot{z} + \ddot{z}_T}{(R_v + 1) g} \quad (2.30)$$

となる。ここで $\ddot{z}$ および $\ddot{z}_T$ は $\sigma$ で表わされているから $D_{cv}$ もまた $\sigma$ で表わされる。

なお、パラメータの範囲は、

$$R_v = 0.0 \sim 6.0$$

$$p_s = 1.0 \sim 5.0 \quad \text{cps}$$

$$\beta_s = 0., 0.02, 0.04, 0.08, 0.10$$

$$\beta_T = 0., 0.03, 0.06, 0.12, 0.15$$

$$V = 40 \sim 120 \quad \text{km/h}$$

標準値として $R_v = 6.0$ ,  $p_s = 3.5 \text{ cps}$ ,  $p_T = 13.0 \text{ cps}$ ,  $\beta_s = 0.04$ ,

$\beta_T = 0.06$ を用いる。数値計算の結果は図2.7にあげたようになった。

### 2.3.3 計算結果の考察

図2.3 (a)(b)においてピークが2つあるのは自動車の固有振動との共振と、橋けたの固有振動との共振のためであり、橋けたの減衰定数 $\beta$ は橋けたの共振点で大きく影響することがわかる。図2.4は橋けたの減衰定数 $\beta$ が動的係数に与える影響について調べたもので、 $\beta$ が0から0.02の間で急激に動的係数は小さくなることがわかる。図2.5は橋けたの減衰定数 $\beta$ をパラメータとして、スパン長と動的係数の関係を調べたもので、スパン長30m~40mの範囲で橋けたの減衰定数が橋けたの動的係数に与える影響が大きいことがわかる。橋けたの減衰定数は一般に0.02程度であることが報告<sup>16),17)</sup>されていることから、この値を基準にすると $\sigma$ で最大が0.051であり、 $2\sigma$ をとれば0.102となり、さらに入力として橋面の凹凸のパワースペクトル密度として選んだ値は名神高速道路のように非常に橋面の平滑度の良好な道路での値であるから、式(2.24)の平滑度パラメータ $a$ を図2.2で示される値の10倍をとるものとすれば1台走行による動的係数として0.32<sup>\*</sup>をとればよいことがわかる。

---

\* 式(2.23)で $\sigma$ は $\sqrt{S_{z_0}(\omega)}$ に比例するので $0.102 \times \sqrt{10} \div 0.32$ となる。

次に走行中の自動車の接地力を計算した図 2.7 について考察する。図(a)は自動車の懸架部およびタイヤ部の減衰定数が接地力の動的係数  $D_{e,v}$  に及ぼす影響について調べたもので、この図から減衰定数は接地力の動的係数に与える影響が大きいことがわかり、その影響度は  $\beta_s = 0.04$ 、 $\beta_T = 0.06$  までは大きく、それぞれその値以上では影響は小さくなっている。図(b)は速度  $V$  をパラメータとしてばね上の固有振動数の影響を調べたもので、 $V$  が小さい間は固有振動数が大きくなると動的係数も大きくなる。 $V$  が  $120 \text{ km/h}$  となるとその差は小さくなる。図(c)は自動車の重量パラメータ  $R_v$  の影響を調べたもので、 $V = 80 \text{ km/h}$  以下では動的係数は  $R_v$  には関係なく一定値をとるようであるが、この速度を越えると  $R_v$  が小さいところで急激に大きくなっている。そして  $R_v$  の大きい場合より  $R_v$  が小さい場合、すなわち、積載車より空車の方が動的係数が大きいことがわかる。このことはわれわれが日常で経験する事実とも一致している。いずれも速度が大きくなると動的係数も大きくなる。

さて、われわれが道路橋など道路構造物を設計する際に考慮しなければならない自動車の接地力の動的係数は、標準車で速度を  $80 \text{ km/h}$  とし、(i)自動車のばね上およびばね下減衰をともに期待しないとすれば、その動的係数は図 2.7(a)のように  $\sigma$  で  $0.294$  となり、 $2\sigma$  で  $0.588$  となる。実際には自動車のばね上およびばね下ともに減衰が存在するのでこの値は最悪の値であるといえる。(ii)自動車の減衰を期待し、その標準値と考えられる一般トラック車の実測値である  $\beta_s = 0.04$  および  $\beta_T = 0.06$  をとれば  $\sigma$  で  $0.053$ 、 $2\sigma$  で  $0.106$  となる。この場合、橋面の凸凹のパワー スペクトル密度として前述のように  $10$  倍をとるものとすればその値は  $0.334$  となり、これに多少の余裕を見込んで、ここでは  $0.4$  を接地力の平均動的係数とみなすことにする（名神高速道路における実験結果を表 5.1 に示してあるがこの場合も同様の結果を得ている）。

## 2.4 同時に多くの不規則外力が作用した場合の動的応答

2.3 で 1 台の自動車が載荷した場合について述べたが、ここでは 2 台以上の自動車が同時に載荷した場合について述べる。なお自動車の形式とその重量は等しいとして論ずる。

各自動車のばね上質量の変位と各測点の変位との伝達関数を図 2.8 のように表わす。図 2.8 中の  $H$  の添字の第 1 は測点の位置を、第 2 は荷重の位置を意味する。

#### 2.4.1 2台の自動車と同時に載荷した場合

2台の自動車と同時に載荷した場合をまず考える。いま1台の自動車がスパン中点に載荷している場合のスパン中点の動たわみを、 $y_{cc}$  とし、左支点から $x_1$  の距離にある測点1の動たわみを $y_{1c}$  とするとこの2つの動たわみの間には、

$$y_{1c} = y_{cc} \sin \frac{\pi x_1}{\ell} = y_{cc} Q_1$$

の関係がある。これはまた載荷点と測点の相反作用の原理により荷重の位置と測点を入れ換えて、

$$y_{1c} = y_{c1} = y_{cc} Q_1$$

として表わすことができる。ここに $y_{c1}$  は荷重が点1に載荷した場合のスパン中点の動たわみを表わす。

荷重2についても同様に

$$y_{2c} = y_{c2} = y_{cc} Q_2$$

として表わされる。このことから図2.8に示す伝達関数はそれぞれ、荷重の位置の項 $Q_n$  を乗じて

$$H_{c1}(j\omega) = Q_1 H_{cc}(j\omega)$$

$$H_{c2}(j\omega) = Q_2 H_{cc}(j\omega)$$

として表わされる。

この場合、荷重1および荷重2によるスパン中点の動的応答の合成パワースペクトル密度は、

$$\begin{aligned} S_{y_{c2}}(\omega) &= |H_{c1}(j\omega)|^2 S_{z1}(\omega) + |H_{c2}(j\omega)|^2 S_{z2}(\omega) \\ &+ |\overline{H_{c1}(j\omega)} \cdot H_{c2}(j\omega)| S_{z1, z2}(\omega) \\ &+ |\overline{H_{c2}(j\omega)} \cdot H_{c1}(j\omega)| S_{z2, z1}(\omega) \end{aligned} \quad (2.31)$$

として表わされる。ここに、式(2.31)中の $S_{z1, z2}(\omega)$ および $S_{z2, z1}(\omega)$ は荷重相互の相互パワースペクトル密度であって、ここでは各自動車の振動は全く独立であると考えられることからこの値は、

$$S_{z_1, z_2}^{(\omega)} = S_{z_2, z_1}^{(\omega)} = 0 \quad (2.32)$$

と表わされる。また、それぞれの自動車の鉛直振動変位のパワースペクトル密度はあまり差はないことから、

$$S_{z_1}^{(\omega)} \approx S_{z_2}^{(\omega)} = S_z^{(\omega)} \quad (2.33)$$

が成立する。故に、式(2.31)は簡単になって

$$\begin{aligned} S_{y_{c2}}(\omega) &= [ |H_{c1}(j\omega)|^2 + |H_{c2}(j\omega)|^2 ] S_z(\omega) \\ &= [ Q_1^2 + Q_2^2 ] |H_{cc}(j\omega)|^2 S_z(\omega) \\ &= [ Q_1^2 + Q_2^2 ] S_{y_c}(\omega) \end{aligned} \quad (2.34)$$

として表わされる。式(2.34)は2台の自動車が同時に載荷した場合の橋げたスパン中点の動たわみのパワースペクトル密度  $S_{y_{c2}}^{(\omega)}$  を与える。

#### 2.4.2 数台の自動車が同時に載荷した場合

この場合は式(2.34)を拡張して、

$$\begin{aligned} S_{y_{cn}}(\omega) &= [ Q_1^2 + Q_2^2 + \dots + Q_n^2 ] S_{y_c}(\omega) \\ &= [ \sum_{i=1}^n Q_i^2 ] S_{y_c}(\omega) \end{aligned} \quad (2.35)$$

として表わされる。

#### 2.5 載荷台数による動的係数の遞減率

スパン中点に1台載荷した場合のスパン中点の静たわみを  $\delta_c$  とする。 $n$  台の荷重が同時に載荷した場合のスパン中点の静たわみは荷重の位置に関する係数  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  を考慮して、

$$y_{sn} = \delta_c ( Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n ) \quad (2.36)$$

として表わされる。

一方、スパン中点の動たわみのパワースペクトル密度は式(2.35)で表わされ、その2乗平均は式(2.22)の  $S_y(\omega)$  に式(2.35)の  $S_{y_{cn}}(\omega)$  を代入すればよい。すなわち、

$$\begin{aligned}\overline{y_{cn}^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (Q_1^2 + Q_2^2 + \dots + Q_n^2) S_{yc}(\omega) d\omega \\ &= (Q_1^2 + Q_2^2 + \dots + Q_n^2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{yc}(\omega) d\omega\end{aligned}\quad (2.37)$$

と表わされる。

この過程の標準偏差 $\sigma$ は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2 + \dots + Q_n^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{yc}(\omega) d\omega} \\ &= \sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2 + \dots + Q_n^2)} \cdot \sqrt{\overline{y_c^2}} \\ &= \sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2 + \dots + Q_n^2)} \cdot \sigma_1\end{aligned}\quad (2.38)$$

ここに、 $\sigma_1$ は1台の自動車による動的応答の標準偏差である。

さて、この場合の動的係数 $\overline{D_{cn}}$ は式(2.36)および式(2.38)から

$$\overline{D_{cn}} = \frac{\sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2 + \dots + Q_n^2)}}{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n} \cdot \frac{\sigma_1}{\delta_c} = \psi_n \overline{D_{c1}}\quad (2.39)$$

ここに、

$$\psi_n = \frac{\sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2 + \dots + Q_n^2)}}{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n} = \frac{\sqrt{\sum Q_i^2}}{\sum Q_i} \quad (\text{減衰率})\quad (2.40)$$

$$\overline{D_{c1}} = \frac{\sigma_1}{\delta_c} \quad (1\text{台乗荷の場合の動的係数の標準偏差})\quad (2.41)$$

と表わされる。

式(2.39)または式(2.40)の $\psi_n$ はパワースペクトル密度や、その周波数 $\omega$ には関係なく、荷重の乗荷台数とその位置によってのみ決まる係数である。

式(2.41)の $\sigma_1$ が1台の自動車による橋げたの動的応答波の動振幅の標準偏差であることから少なくとも68.27%はこの振幅内にあり、 $\overline{D_{c1}}$ は1台走行による代表的動的係数と考えることができる。もし、スパン中点の動たわみが時間関数として表わされているとすればその関数の動的係数に関係する値であって1台の自動車による動的係数とみなしてよいであろう。そこで改めて、 $\overline{D_{c1}}$ を $D_{c1}$ と書くと、この場合は式(2.39)の $\overline{D_{cn}}$ も一般に $n$ 台同時に乗荷した場合の動的係数 $D_{cn}$ と書きかえることができる。

すなわち、式( 2. 39 )は、

$$D_{cn} = \psi_n \cdot D_{c1} \quad ( 2.42 )$$

となる。

式( 2.42 )が $n$ 台の自動車が同時に載荷した場合の動的係数を表わす。

いま、自動車が並列に橋の幅員方向に載荷した場合は式( 2.40 )の $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ は等しくなり次式のように表わされる。

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$$
$$\psi_n = \sqrt{n} \quad n = 1/\sqrt{n} \quad ( 2.43 )$$

ここに、 $n$ は荷重の台数であり、縦軸に通減率 $\psi_n$ を横軸に載荷台数 $n$ をとってプロットすると図2.9の破線となる。

また、設計活荷重に見合うような連行荷重列（ここでは10mの等間隔な自動車列）を考えると、 $\psi_n$ は図2.9の実線のようになる。

このように、 $\psi_n$ は載荷台数による通減関数として表わされることから以下 $\psi_n$ を載荷台数による通減関数と呼ぶことにする。

このことから動的係数もまた載荷台数によって小さくなることがわかる。

式( 2.42 )が $n$ 台の自動車が同時に載荷した場合の橋げたの動的係数を表わす理論式であって、この章で求めたおもな結果であり、以後の解析に用いられている。

#### 参 考 文 献

- 1) Timoshenko, S.: Vibration Problems in Engineering, Third Edition, 345/358, Van Nostrand, 1955.
- 2) Biggs, J. M., Suer, H. S. and Louw, J. M.: The Vibration of Simple-Span Highway Bridges, Proc. of ASCE, Vol. 83, ST2, 1186-1/32, (1957).
- 3) 平尾 収, 近藤政市, 亘理 厚, 山本峰雄: 理論自動車工学, 215/264, 山海堂, 昭39.
- 4) 川合平夫, 森崎健二: 自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性, 三菱重工技

- 報 Vol. 2 No. 2, 20/27, (昭40) .
- 5) 高橋安人：路面の性質と自動車振動を結ぶ一理論，自動車技術，Vol. 7，  
No. 11-12, 286/290, (昭28) .
- 6) 兼重一郎：パワースペクトル解析の自動車への応用，いすゞ技報，No. 23, 1/9，  
(昭35) .
- 7) Kaneshige, I.: Measurement of Power Spectra of  
Vehicle Vibration and Vehicle Road Roughness,  
Proc. of the 10<sup>th</sup> NCTAM, 1960.
- 8) 兼重一郎：自動車走行時振動のパワースペクトル解析，自動車技術，Vol. 18，  
No. 4, 261/267, (昭39) .
- 9) 得丸英勝，芝川寿夫：不規則な道路凹凸による自動車振動の多入力系としての解析，  
日本機械学会第44期全国大会，No. 158, (昭41) .
- 10) Edited by Crandall, S.H.: Random Vibration, Vol. 1  
and 2, The M.I.T. Press, 1959, 1963.
- 11) Robson, J.D.: An Introduction to Random Vibration,  
Elsevier, 1964.
- 12) 宮脇一男，三根久訳 (Rice, S.O. 著)：雑音理論，電気書院，昭30 .
- 13) 宮脇一男：雑音解析，朝倉書店，昭36 .
- 14) Thomson, W.T.: Vibration Theory and Applications,  
Prentice Hall, 314/344, 1965 .
- 15) Lin, Y.K.: Probabilistic Theory of Structural  
Dynamics, McGraw-Hill, 34/154, 1967 .
- 16) 小西一郎，山田善一：鋼構造物の減衰性と桁橋の強制振動性状について，土木学会  
誌 Vol. 41, No. 2, 7/13, (昭31)
- 17) 伊藤学，片山垣雄：橋梁構造の振動減衰，土木学会論文集，No. 117, 12/22，  
(昭40) .
- 18) 山田善一，和田的治：鋼構造継手による振動減衰に関する研究，第20回土木学会  
年次学術講演会，1-53, (昭40) .



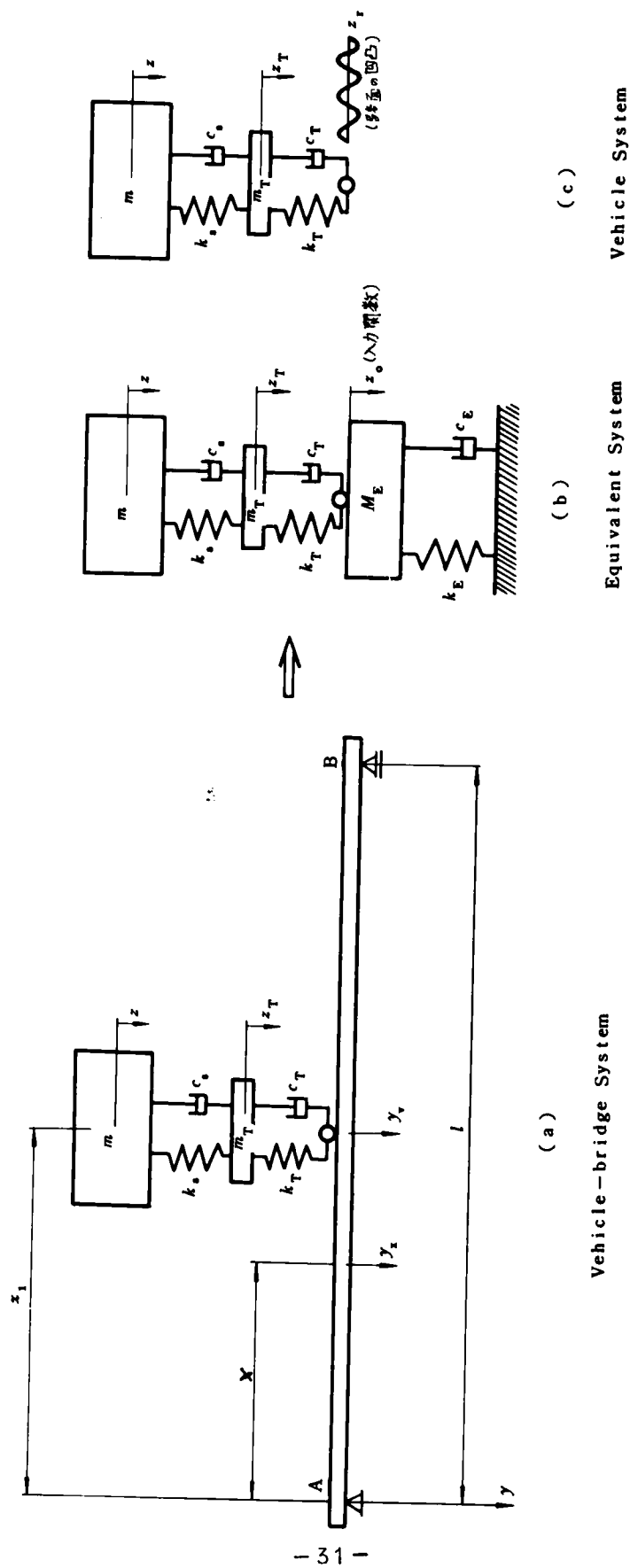


图 2.1 振 动 系 模 型

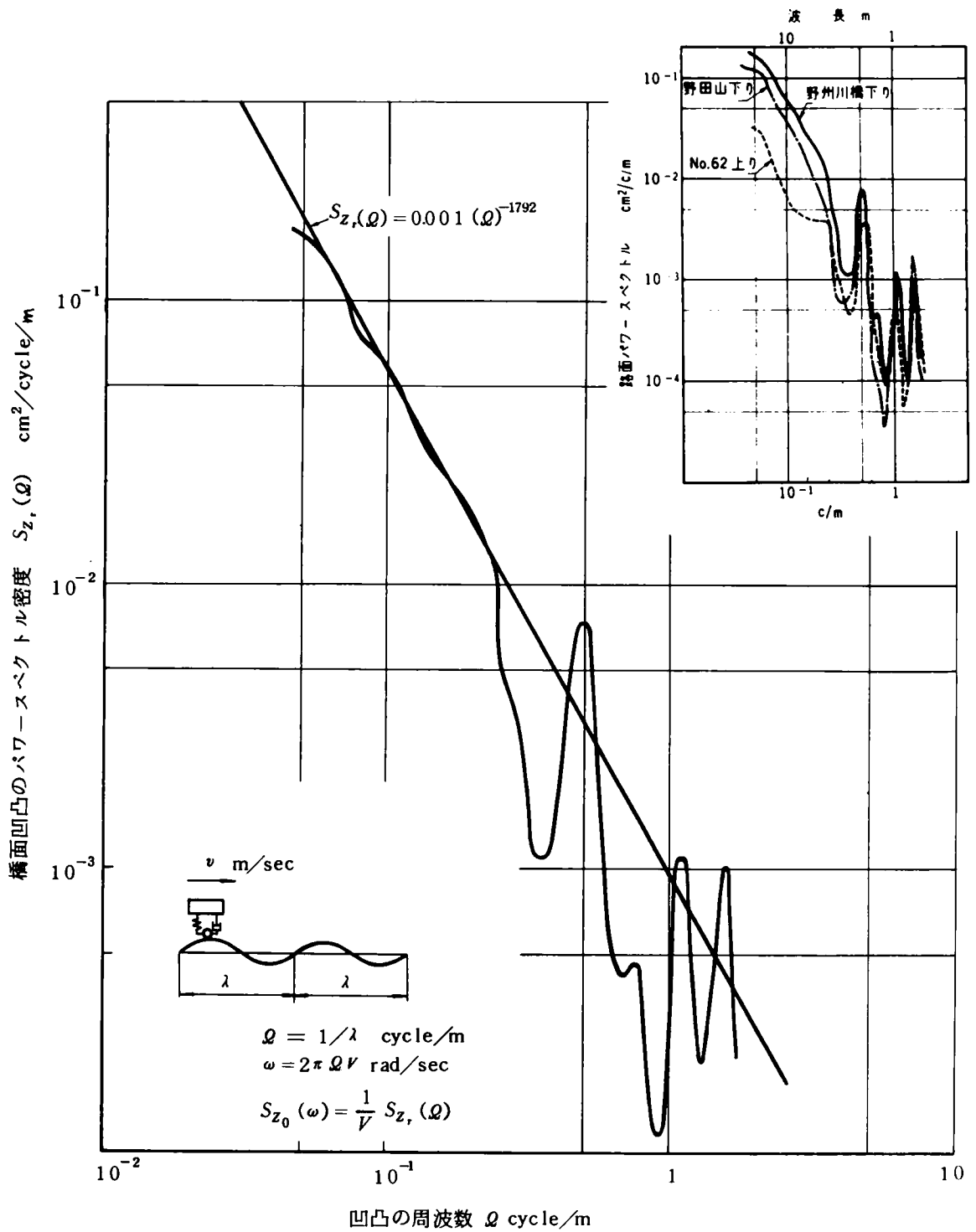


図 2.2 橋面凹凸のパワースペクトル密度

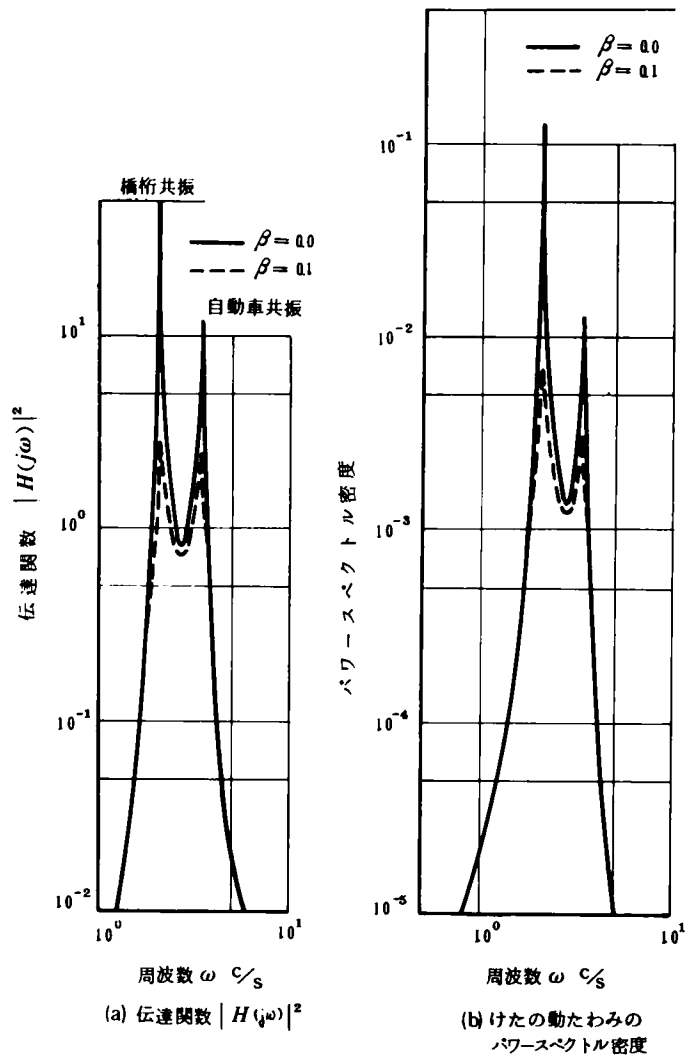


図 2.3 伝達関数と動的応答のパワースペクトル密度  
 $l = 50 \text{ m}$      $V = 10.0 \text{ m/sec}$

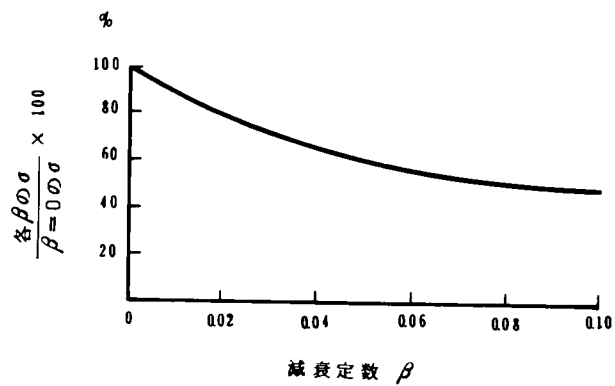


図 2.4 減衰定数と動的応答の  $\sigma$  との関係  
 $l = 50 \text{ m}$ ,  $V = 10.0 \text{ m/sec}$

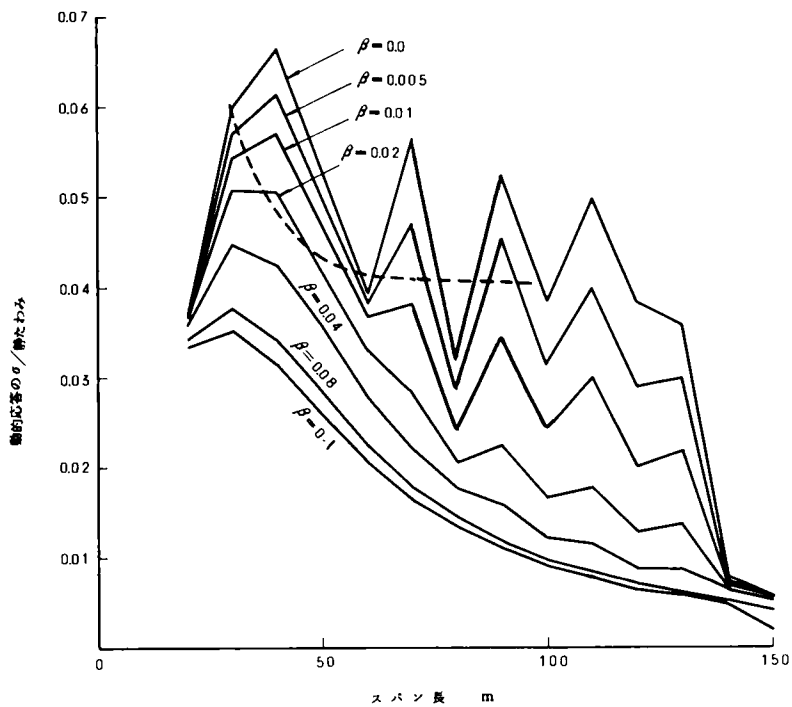


図 2.5 1 台載荷の場合のスパン長と動的係数との関係

\* --- は走行荷重 1 台の共振曲線の包絡線，図 3.8 参照  
 $S_{Z_v}(\omega)$  は図 2.2 の実験値を用いている

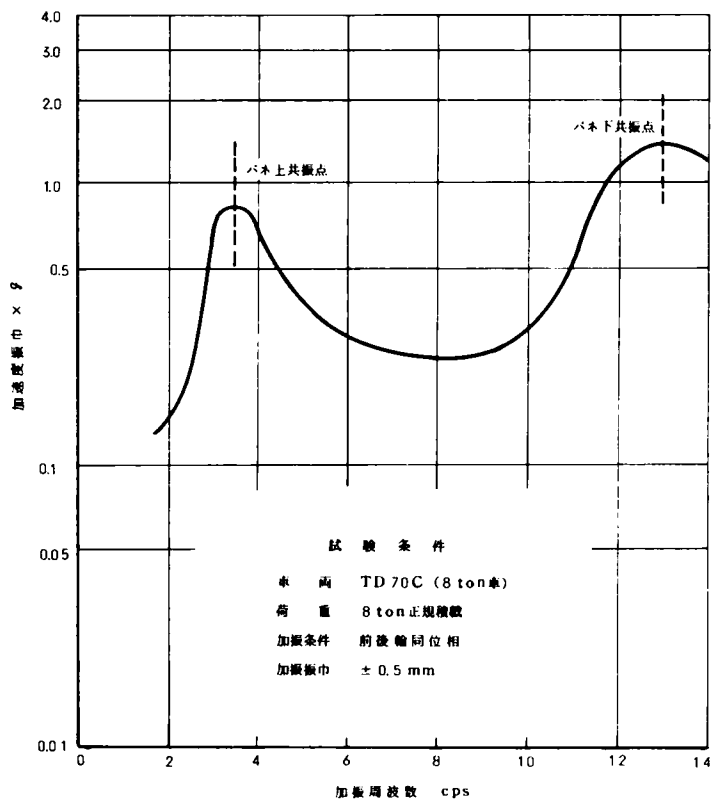


図 2.6 大型トラック車の周波数特性 (TD 70)

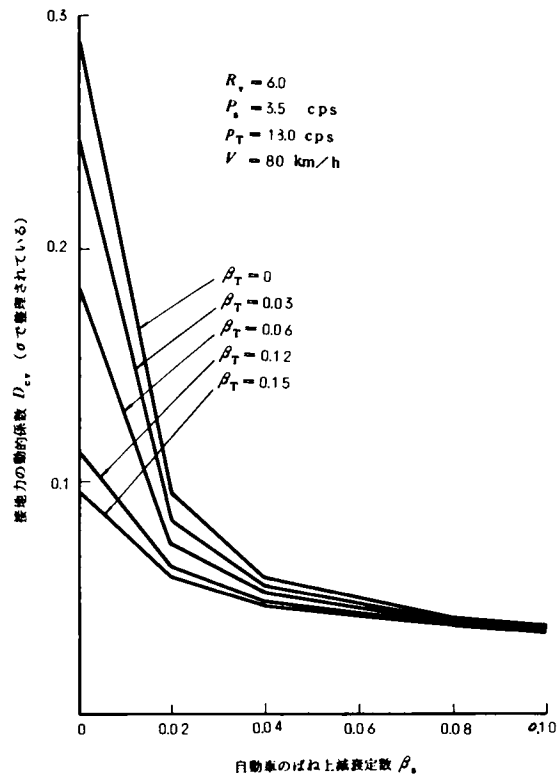


図 2.7 (a) 自動車のばね減衰と接地方の動的係数との関係

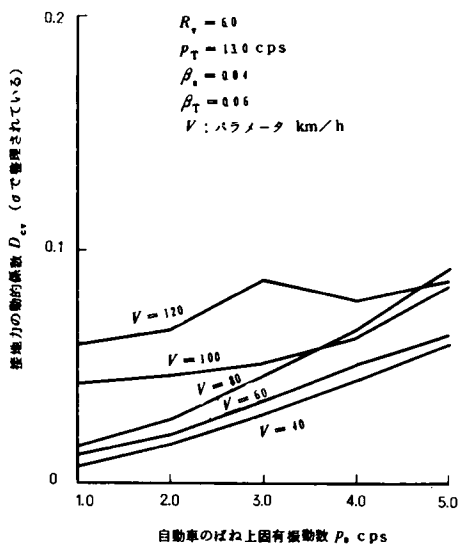


図 2.7 (b) 自動車のばね固有振動数と接地方の動的係数との関係

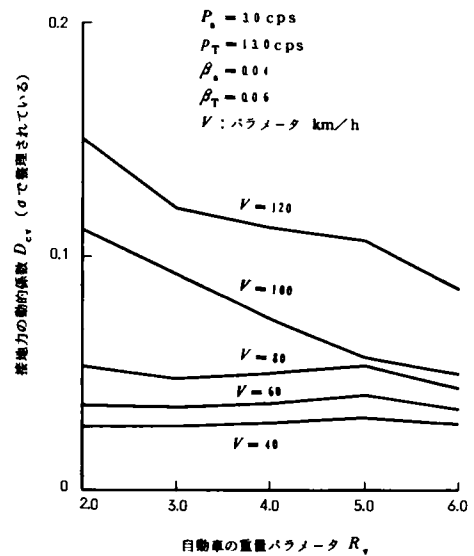
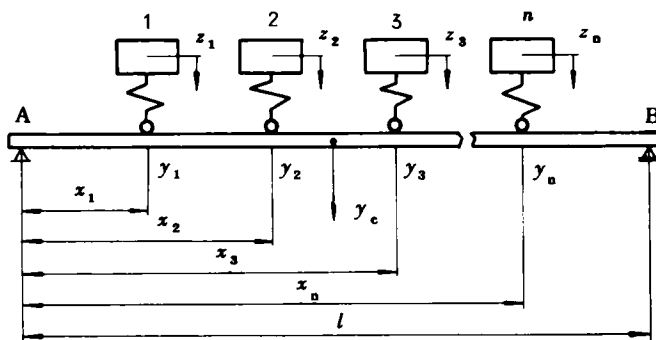


図 2.7 (c) 自動車の重量パラメータと接地方の動的係数との関係



伝 達 関 数

$z_1$	$H_{11}$	$H_{21}$	$H_{31} \cdot H_{n1}$	$H_{c1}$
$z_2$	$H_{12}$	$H_{22}$	$H_{32} \cdot H_{n2}$	$H_{c2}$
$z_3$	$H_{13}$	$H_{23}$	$H_{33} \cdot H_{n3}$	$H_{c3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$z_n$	$H_{1n}$	$H_{2n}$	$H_{3n} \cdot H_{nn}$	$H_{cn}$
	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_n$
			$y_c$	

図 2・8 伝 達 関 数 表

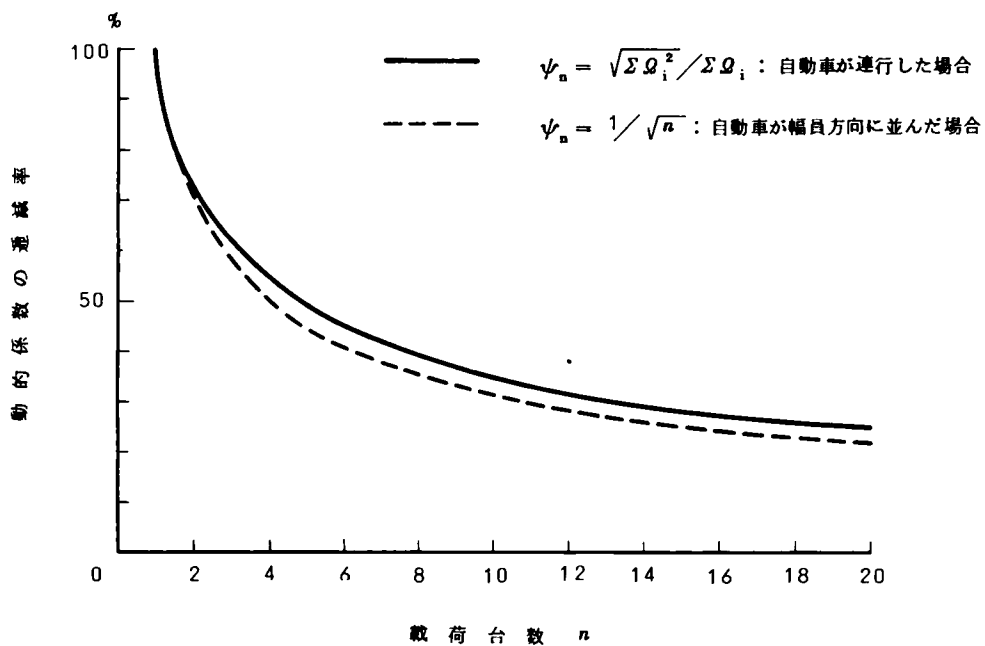


図 2・9 載荷台数と動的係数の通減率

## 第3章 シミュレーションによる道路橋 の動的応答と2, 3の実験

### 3.1 概 説

第2章において橋りょう上を走行する自動車の振動は不規則であり、その原因も種々であることを述べ、このような不規則な振動を解析する一つ的手段として不規則振動論を応用して、走行自動車荷重による橋けたの動的係数が載荷台数によって逓減することを述べた(2.5節)。

本章においては、前章の解析とは別に電子計算機の中で交通流や橋けたの模型を作成して、この交通流による橋けたの振動についての数値計算を行ない、いわゆる電子計算機を用いてシミュレートすることを試みる。

この時の交通流模型としては、実際の交通流調査の結果をもとに、確率模型として電子計算機の中で作成されたものを用いた。この場合も第2章と同様に載荷台数によって動的係数は小さくなることが立証された。

さらに本章の後半において著者が関係した幾つかの走行荷重による橋りょうの振動実験の結果をあげ前に求めた結果と比較した。

### 3.2 ランダム自動車荷重列のシミュレーション<sup>1)</sup>

#### 3.2.1 調 査

この交通流調査はできるかぎり、実際の交通流に近い形で記録されなければならないことから一般に行なわれている交通調査とはその趣を異にしている。

著者は昭和39年3月18日国道1号線逢坂山付近で交通流調査を行なった。この場合のスケッチを図3.1に示す。

まず、交通流を大型車と小型車(重量による判別)に分けて、ある地点を通過することに押ボタンを押すことにより、信号を一定速度で捲き取られているオッシログラフ上に記録した。また一方車種別統計をとるために、その時間帯全域にわたって8mmカメラによっ

てその速度を記録した。

a) 到着台数について

これらの記録をもとにある時間帯における到着台数を集計したものが図 3.2 であり、その交通流の車頭間隔を集計した図が図 3.3 である。

さて到着台数の分布はその間隔を適当に選べば平均値  $m$  をもつポアソン分布となり、この調査では間隔を 15 sec と選んでその平均値を求めると 3.33 台となる。

一方、時間交通量を区間数で割ればその区間内に含まれる平均台数となり、この場合は  $(807/3600) \times 15 = 3.36$  台となって、図 3.2 の統計から求めた平均台数 3.33 台とよく一致している。

b) 車頭時間間隔について

交通流の区間時間帯または間隔を  $T$  とし、その  $T$  時間内に含まれる平均台数を  $m$  としてちょうど  $k$  台の自動車が通過する確率を  $p(k \cdot m)$  とすると<sup>2)</sup>

$$p(k \cdot m) = \frac{m^k}{k!} \exp(-m) \quad (3.1)$$

と表わされる。いま、 $m = 3.34$  台として式 (3.1) からポアソン分布曲線を求めると、図 3.2 の点線のようになる。

次に、いま  $t = 0$  から  $t = T$  までの間に自動車が通過しない確率は  $k$  を 0 とした場合に相当し、

$$p(0, \lambda T) = \exp(-\lambda T) \quad (3.2)$$

で表わされる。 $\lambda$ : 平均台数 (1/sec)。

これは、相い次いで到着する自動車の時間間隔が  $T$  より大きくなる確率である。

いま、車頭時間間隔の確率密度関数を  $q(T)$  と書くと

$$\int_T^\infty q(T) dT = \exp(-\lambda T) \quad (3.3)$$

となり、 $T$  をあらためて確率変数  $t$  とおきかえると、式 (3.3) から

$$q(t) = \lambda \exp(-\lambda t) \quad (3.4)$$

と表わされる。ここに、 $q(t)$  が車頭間隔が  $t$  である場合の確率密度関数である。この式から車頭間隔は必然的に指数分布となる。



さらに確率分布関数は

$$P(t) = \int_0^t \lambda \exp(-\lambda t) dt \quad (3.5)$$

で与えられる。

さて、先に示した国道1号線における観測の結果を、車頭時間間隔について統計をとると、図3.3のように図示される。この図で、class mark 0.5 sec 以下の度数は全体の7%であり、急激に小さくなっているが、このことは境界値0.75 sec をとって時速40 km/hで8.3mとなり、自動車運転上非常に危険な状態である。これは特殊な自動車間隔といわざるを得ない。この点から本論文における車頭間隔の分布は0.75 sec を最小限界車頭間隔と考え、これより以下の間隔はないものとし、この最小限界車頭間隔について平均値  $1/\lambda$  sec をもつ指数分布としてシミュレートすることにする。

すなわち、式(3.5)は次のように変形される。

$$P(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{t_m - t_0} \exp\left(-\frac{t - t_0}{t_m - t_0}\right) dt \quad (3.6)$$

ここに、

$t_0$  : 最小限界車頭間隔 = 0.75 sec

$t_m$  : 平均車頭間隔 =  $T/m = 1/\lambda$  sec

次に、ここで自動車列中の個々の自動車の速度のバラツキについて考察する必要がある。

一般に到着台数を求める際の速度は時間速度といわれるもので、車頭間隔を論ずる際の速度は空間速度といわれるものである。

これまでの研究では、平均速度は時間分布の方が空間分布の場合より一般に小さく現われ標準偏差も小さいといわれる。<sup>2) 3)</sup> しかし、本論文のように自動車が比較的密に走行している場合、自動車は自由に速度を調節できず、前後の自動車によって制約を受け、その車頭時間間隔が7~9 sec である場合は各自動車の速度は一定であると考えてもよい。しかる場合は時間平均速度も空間平均速度も等しいと考えてよからう。

このことから先に述べた車頭間隔であるがこれは時間(sec)の単位で表わされているが、前述の理由からこの車頭時間間隔に自動車の平均速度を乗じて車頭間隔を距離の単位で求めることができる。このように車頭間隔を時間間隔で表わしておけば、速度による変化は自動的に速度を乗ずることで変化させることができるので便利である。このように変換可能とした根底には車頭間隔の平均および最小限界車頭間隔は速度の1次関係によっ

て求まるとしたことによるものである。

c) 重量分布について

次に、道路橋等道路構造物の設計荷重として重要な要素に自動車列の重量分布があるが今回の観測では調査できなかったので西村の論文<sup>4),5)</sup>中にある昭和30年に建設省近畿地方建設局が行なった資料に基づき、大型車、小型車の割合を $p:q$  ( $p+q=1.0$ )としそれぞれ正規分布しているものとして、すなわち双峰性確率曲線とし式(3.7)および図3.4のように表わされるものとした。なお観測では $p$ および $q$ の値を知るにとどめた。それらの値を表3.1に示す。

表 3.1 観測値の大型車と小型車の比率<sup>1)</sup>

			大 型 車 ( $p$ )	小 型 車 ( $q$ )
国道1号線	草 津	上 り	0.406	0.594
		下 り	0.451	0.549
	逢 坂 山	上 り	0.252	0.748
		下 り	0.313	0.687
国道8号線	高 岡 大 橋	上 り	0.255	0.745
		下 り	0.257	0.743
	手 取 大 橋	上 り	-	-
		下 り	0.330	0.670

自動車総重量の確率分布関数は

$$P(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^w \left\{ q \frac{1}{\sigma_1} \exp\left(-\frac{(w-w_1)^2}{\sigma_1^2}\right) + p \frac{1}{\sigma_2} \exp\left(-\frac{(w-w_2)^2}{\sigma_2^2}\right) \right\} dw \quad (3.7)$$

ここに、 $w_1$  : 小型車平均重量\*

$w_2$  : 大型車平均重量\*

$\sigma_1$  : 小型車標準偏差\*

$\sigma_2$  : 大型車標準偏差\*

\* 大型車とはトラック・バス等大重量車を、小型車とは乗用車等の軽重量車をいう。

### 3.2.2 ランダム自動車列模型の作成

以上の調査の結果をもとに、車頭間隔は指数分布を、重量は小型車および大型車についてそれぞれ正規分布をなしているような確率模型を電子計算機の中で作成する。

プログラム作成上の基本方針は次のようである。まず重量および車頭間隔の確率分布を代表する最小限の数値を input data に選び、先頭自動車から順次  $i$  番目の自動車の重量を求めるための乱数を発生せしめこれに対応する重量を式 (3.7) からモンテカルロ法<sup>6)</sup>によって求める。次で車頭間隔も同様にして、各車頭間隔に対応する乱数を発生させ、式 (3.6) を変形した式 (3.9) より求めるそれぞれの値を数列として表わす。

この場合のプログラムのフローチャートを図 3.5 に示す。

#### a) Input data

input data は必要最小限とし、表 3.2 に示す。その代表値をも表中に示した。

表 3.2 ランダム荷重列を作成するプログラムの input data

ランダム荷重列の全台数 $N$		整 数	100
車群台数の平均値 $\bar{n}$		実 数	4.42
車頭間隔の平均値 $m$		実 数	24.9
大型車と小型車の比 ( $p:q$ )		実 数	3:7
重量分布の平均値 $\bar{w}$ ton	大 型 車	実 数	7.74
	小 型 車	実 数	1.54
重量分布の標準偏差 $\sigma$ ton	大 型 車	実 数	1.54
	小 型 車	実 数	0.55
車頭間隔を計算するときの間隔 $\tau_m$		実 数	0.1
重量を計算するときの間隔 $\Delta w$ ton		実 数	0.1

#### b) 乱 数<sup>6)</sup>

乱数は一様乱数を必要とするが、求める自動車列は1列について100台から1000台程度であるので、電子計算機の中で合同法により擬似乱数を発生せしめた。この乱数は周期性をもっているが、著者はこれに多少の改良を加えている。そのプログラムをランダムサブルーチンとして作成し、付録A.4に示した。

なお、乱数を1万個発生させたときの乱数および数字の分布性、poker, gap テス

トの結果は満足すべきものであった。

さて、発生させた乱数を5桁とし、0.0～1.0までの数として、式(3.6)および式(3.7)の確率 $P(x)$ に対応させて車頭間隔および重量を求める。

#### c) 重 量

重量は双峰性正規分布であり、式(3.7)から求められる。計算の便宜上式(3.7)を式(3.8)のように変形し、まず乱数を発生させ、次で100kg単位で式(3.8)を数値計算し、さきに求めた乱数に対応する重量を求める。作成された自動車列の小型車、大型車の比、それぞれの平均値および標準偏差を計算して印刷するようプログラムされている。

$$P(w) = q \left[ \frac{1}{2} + \frac{u_1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 1 - \frac{u_1^2}{3 \cdot 2 \cdot 1!} + \frac{u_1^4}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \frac{u_1^6}{7 \cdot 2^3 \cdot 3!} + \dots \right\} \right] \\ + p \left[ \frac{1}{2} + \frac{u_2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 1 - \frac{u_2^2}{3 \cdot 2 \cdot 1!} + \frac{u_2^4}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \frac{u_2^6}{7 \cdot 2^3 \cdot 3!} + \dots \right\} \right] \quad (3.8)$$

ここに、 $u_1 = (w - w_1) / \sigma_1$

$u_2 = (w - w_2) / \sigma_2$

である。

#### d) 車 頭 間 隔

車頭時間間隔は式(3.6)から求められるが、計算の便宜上式(3.6)を式(3.9)のように変形し、0.1 sec 単位で計算する。さらに作成した自動車列の平均車頭間隔を計算し印字する。なお重量と車頭間隔は独立した乱数から求められるように配慮されている。

$$t_i = t_0 - (t_m - t_0) \log(1 - P(t)) \quad (3.9)$$

#### e) Output data

output data は上記の代表値のほかに必要に応じて各重量および車頭間隔が印刷されるようになっている。

### 3.3 基本運動方程式と計算式

ランダム荷重列と橋けたの振動系を図3.6のように仮定する。

また、橋けたの動たわみについては Newmark によって提案された次の関数を用いる。

いま、荷重の先頭車が橋けたの左支点上を出発する時刻を  $t=0$  として、この  $t$  で以後の時刻を測ることにする。

まず、けたの無応力状態を基準として測ったけたの全たわみ  $y$  を一般座標  $q(t)$  と基準座標  $\psi(t, x)$  で表わす。

すなわち

$$y = q(t) \psi(t, x) \quad (3.10)$$

$$\text{ここに, } \psi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K} \eta_n(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (3.11)$$

$$\eta_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \frac{W_i}{n^4} \sin \frac{n\pi x_i}{\ell} \quad (3.12)$$

ここに、 $W_i$  :  $i$  番目の荷重の重さ

$K$  : けたの曲げ剛性パラメータ (けたの静たわみに合わせるとすれば  
 $(\ell EI/2) (\pi/\ell)^4$ )

$\epsilon_i$  :  $i$  番目の荷重がけた上にあるかどうかを判定する値

$$0 \leq x_i \leq \ell \text{ のとき } \epsilon_i = 1$$

$$0 \geq x_i \geq \ell \text{ のとき } \epsilon_i = 0$$

このようにして、図3.6に示すランダム荷重列と橋けたからなる系の全位置エネルギー  $V$ 、運動エネルギー  $T$  および減衰関数  $D$  は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} V = & \frac{EI}{2} \int_0^l (\mathbf{y}'')^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \epsilon_i k_i (z_i - y_i)^2 \\ & - \sum_{i=1}^r \epsilon_i (M_i g) y_i + \frac{1}{2} \int_0^l EI (\mathbf{y}_d'')^2 dx + \frac{1}{2} k_i d^2 \\ & - M_i g \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \int_0^l w y_d dx \end{aligned} \quad (a)$$

ここに、 $y_d$  : けたの自重によるたわみ

$d$  : 荷重の自重によるばね変位

$$T = \frac{w}{2g} \int_0^l \dot{y}^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r M_i \dot{z}_i^2 \quad (\text{b})$$

$$D = \frac{1}{2} c \int_0^l \dot{y}^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \varepsilon_i c_i (\dot{z}_i - \dot{y}_i)^2 \quad (\text{c})$$

第2章と同様にこれらの関数を Lagrange の運動方程式に入れて整理すると、

$$\begin{aligned} & \frac{w\ell}{2gK^2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \eta_n^2 \ddot{q} + 2\eta_n \dot{\eta}_n \dot{q} + \eta_n \ddot{\eta}_n q \} + \frac{EI\ell}{2K^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^4 \eta_n^2 q \\ & + \frac{c\ell}{2K^2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \eta_n^2 \dot{q} + \eta_n \dot{\eta}_n q \} - \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \{ k_i (z_i - y_i) \frac{\partial y_i}{\partial q} \\ & + (M_i g) \frac{\partial y_i}{\partial q} \} - \sum_{i=1}^r \varepsilon_i c_i (\dot{z}_i - \dot{y}_i) \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (3.13) \end{aligned}$$

となる。いま式(3.13)の中で、 $\eta_n$ の $n=2$ 以上の項は $n=1$ の項に比較して $1/n^4$ のオーダーで小さくなることから本論文では、 $n=2$ 以上の項を省略すると式(3.13)は次のように整理される。

$$\begin{aligned} & \frac{w\ell\eta}{2gK} \ddot{q} + \left\{ \frac{w\ell}{gK} \dot{\eta} + \frac{c\ell}{2K} \eta \right\} \dot{q} + \left\{ \frac{w\ell}{2gK} \ddot{\eta} + \frac{c\ell}{2K} \dot{\eta} + \frac{EI\ell}{2K} \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^4 \eta \right\} q \\ & - \sum \varepsilon_i \{ k_i (z_i - y_i) + M_i g + c_i (\dot{z}_i - \dot{y}_i) \} \\ & \cdot \sin \frac{\pi v t_i}{\ell} = 0 \quad (3.14) \end{aligned}$$

一方、荷重列については、それぞれの荷重系について運動方程式は、

$$\varepsilon_i \{ M_i \ddot{z}_i + k_i (z_i - y_i) + c_i (\dot{z}_i - \dot{y}_i) \} = 0 \quad (3.15)$$

$i = 1, 2, \dots, r$

と表わされる。

いま、計算の便宜上

$$\tau' = t/T_b$$

$$\tau = vt/\ell = vT_b \tau'/\ell = 2\alpha \tau' = p_0 \alpha t/\pi$$

$$K = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \frac{EI\ell}{2} = w\ell p_0^2 / 2g \quad \text{剛性パラメータ}$$

$$\alpha = \frac{\pi v}{p_0 \ell} = \frac{v T_b}{2\ell} \quad \text{速度パラメータ}$$

$$p_0 = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EIg}{w}} \quad \text{橋けたの固有円振動数 (rad/sec)}$$

$$\mu = \frac{k_i}{W_i} \quad \text{自動車の固有円振動数に関するパラメータ (1/cm)}$$

$$\beta = cg / 2wp_0 \quad \text{減衰定数}$$

の記号を用いて式 ( 3.14 ) および ( 3.15 ) を無次元の形で整理すると次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q}{d\tau^2} = \frac{-\pi^2}{\alpha^2 \eta} [ \{ \alpha^2 \eta' + \alpha \beta \eta \} \frac{2}{\pi} \frac{dq}{d\tau} + \{ -\alpha^2 \eta + \eta + 2\alpha \beta \eta' \} q \\ - \sum \varepsilon_i \{ \mu W_i (z_i - y_i) + \frac{\alpha p_0 c_i}{\pi} \left( \frac{dz_i}{d\tau} - \frac{dy_i}{d\tau} \right) \} \sin \pi \tau_i - \eta ] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\frac{d^2 z_i}{d\tau^2} = \frac{-\pi}{p_0^2 \alpha^2} \{ \mu g (z_i - y_i) + \frac{\alpha p_0 g}{\pi W_i} c_i \left( \frac{dz_i}{d\tau} - \frac{dy_i}{d\tau} \right) \} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{d\tau} = \frac{1}{K} [ \eta \sin \pi \tau_i \frac{dq}{d\tau} + \{ \pi \eta \cos \pi \tau_i + \pi \eta' \sin \pi \tau_i \} q ] \\ + \delta_0 \pi \cos \pi \tau \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$y_i = \frac{q}{K} \eta \sin \pi \tau_i + \delta_0 \sin \pi \tau_i \quad (3.19)$$

$$\eta = \sum \varepsilon_i W_i \sin \pi \tau_i \quad (3.20)$$

$$\eta' = \sum \varepsilon_i W_i \cos \pi \tau_i \quad (3.21)$$

ここに、 $\delta_0$ は橋りょうのキャンパー量に関係する項である。

さらに、ランダム荷重列の車頭間隔は時間単位で表わされているが、数値計算にあたっては、それぞれの車頭時間間隔を橋けたの固有周期で除した値を用いることにする。すなわち、 $\tau'_i = t_i / T_b = p_0 \cdot t_i / 2\pi$  として表わす。

次に、式(3.16)～(3.21)中に速度パラメータ $\alpha$ 、固有振動数 $p_0$ および剛性パラメータ $K$ の3箇のパラメータを用いているが、 $p_0$ と $K$ とはともに橋けたの曲げ剛性に関係するパラメータである。しかし、その関係は理論的に求めることが困難であるので、この論文では、建設省土木研究所設計の合成けた橋標準設計<sup>7)</sup>からスパン長と曲げ剛性 $EI$ および固有振動数 $p_0$ の関係を求めている。橋けたの減衰定数については、前章でも述べたように動的応答に与える影響は大きい、しかし一般の鋼橋では $\beta = 0.02$ 程度であることが報告<sup>8)</sup>されているので、この章ではこの値を用いる。これらの値は前章表2.2のとおりである。

以上の式(3.16)～(3.21)についていま一度考察を加えると下記のようなになる。

(1) パラメータとしては速度パラメータ $\alpha$ および固有振動数 $p_0$ の2つである。これらの2つのパラメータの間にはある種の関係が存在しているが、速度のみを変える場合は $\alpha$ のみを、橋けたの固有振動数を変える場合は $\alpha$ も同時に計算されなければならない。

(2) ランダム荷重列の統計量(平均値や標準偏差等)が等しく、上記2つのパラメータが等しい場合は橋けたの動たわみは等しいと解される。

以上2点を考慮してランダム荷重列として3.2節で求めた荷重列を用い、各自動車が橋りょうに入る際の expansion joint による衝撃値<sup>9),10)</sup>を初期条件として Newmark's  $\beta$  method<sup>11),12)</sup>を用いて数値積分を行なう。電子計算機のフローチャートを図3.7に示す。

### 3.4 単一荷重による動的応答

まず、自動車が1台走行する場合の橋けたの動的応答について考察しよう。

一般交通中の自動車は乗用車、トラック車、バス、など種々の形式の車が混合し、さらに重量もそれぞれ異なっている。このことから本節においては自動車の固有振動数、重量および自動車の初期変位(自動車は橋けたに入る際の expansion joint によって大きな衝撃を受ける)が橋けたの動的応答にいかなる影響を与えるかについて述べる。



a) 自動車の固有振動数と橋けたのスパン長

自動車の固有振動数は主としてその懸架ばね、タイヤのばね定数や自重および積載重量によって決まる。このことから一般交通には種々の固有振動数を有する自動車が含まれているのである。このような自動車の固有振動数が橋りょうの動的応答にいかなる影響を及ぼすかを調べるために、自動車の固有振動数を表 3.3 のように選び、これに対するパラメータ  $\mu$  を定める。

表 3.3 自動車の固有振動数とパラメータ  $\mu$

自動車の固有振動数	パラメータ $\mu$
4.0 cps	0.643 $\gamma_{cm}$
3.0 cps	0.362 $\gamma_{cm}$
2.5 cps	0.252 $\gamma_{cm}$
2.0 cps	0.162 $\gamma_{cm}$

その他自動車と橋けたとの各種諸元については本節では標準として表 3.4 の値を用いる。

表 3.4 自動車と橋けたの各種諸元

諸 元	値	摘 要
自動車総重量	7740 kg	大型車平均
自動車の減衰係数	26 kg/cm/sec	走行試験の結果より <sup>9),10)</sup>
橋けたの曲げ剛性 $EI$ および重量	表 2.2	建設省土木研究所合成けた橋標準設計より <sup>7)</sup>
橋けたの減衰定数	0.02	文献 8) より
自動車の走行速度	60 km/h	設計速度として比較的高速

これらの諸数値を用い計算プログラムに従って、1台走行による各スパン長に対する動的応答を求め、さらに動的係数とスパン長との関係で整理したのが図 3.8 である。

この場合の自動車の初期変位は表 3.5 の  $R$  を 0.3 として、パラメータ  $\mu$  に対する値を用いた。なお  $R$  については c) で述べる。

表3.5 パラメータ $\kappa$ および $\mu$ に対する初期変位 $z_0$ の値

$\mu \quad y_{cm}$		$\kappa$			
		0.1	0.2	0.3	0.4
0.446		0.224	0.448	0.672	0.896
0.362		0.276	0.552	0.828	1.104
0.252		0.397	0.794	1.191	1.588
0.162		0.617	1.234	1.851	2.468

さて、計算結果図3.8を見ると各振動数について1種の共振曲線が描かれ、その包絡線はスパンとともに小さくなる関数として表わされる。このことはもし、あるスパン長に対する共振振動数を有する自動車が通過してもスパン長が大きくなると動的係数はそんなに大きくはならないだろうことを意味している。

#### b) 自動車の重量が橋けたの動的係数に及ぼす影響

この問題を調べるために、スパン長を30mと定め、パラメータ $\mu$ を0.446、パラメータ $\kappa$ を0.2, 0.3および0.4に選び、他の諸元はa)の場合と同様にして、数値計算を行なった。計算の結果を図3.9に示す。この図から前第2章2.3節と同様に自動車の総重量が大きくなると動的係数が小さくなることがわかる。

#### c) 初期変位が橋けたの動的応答に与える影響

橋けたの初期条件は $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  とする。自動車の初期条件は主として、橋けたに入る前の凹凸による振動と expansion joint による衝撃によって決まる。

このときの自動車の振動成分の最大値と静的荷重の比をとり、それを $\kappa$ で表わし、この $\kappa$ を0.1, 0.2, 0.3となるように荷重の初期変位 $(z_i)_0$ を選んだ場合について計算を行なった。なお、この場合の初期速度 $(\dot{z}_i)_0$ は零としている。

すなわち、 $t = 0$ における各荷重のもつ最大振動成分は、

$$k_i [z_i - y_i]_0 = \mu W_i [(z_i)_0 - (y_i)_0] = \kappa W_i \quad (3.22)$$

$$\kappa = \mu [(z_i)_0 - (y_i)_0] \quad (3.23)$$

として表わされ式(3.23)中、 $i$ 番目の荷重が橋けたの左支点上にあるときは

$(y_i)_0 = 0$  であるから式(3.23)は書きかえられて、

$$(z_i)_0 = \kappa / \mu \quad (3.24)$$

となる。ここで、式(3.24)中のパラメータ $\mu$ および $\kappa$ のそれぞれの数値に対する各自動車の初期変位 $(z_i)_0$ の値を表3.5に示す。今回の計算では自動車の走行中の固有周期を0.3 secにとり、それぞれの $\kappa$ に対する荷重の初期変位、 $(z_i)_0$ は表3.5の最上段の値を用いることにした。なお、この $\kappa$ は本章の計算では橋りょう上を走行していることを考慮して標準として0.3を採用した。

さて、初期条件をこのように定め、自動車の総重量を7740 kg (大型車平均) および15480 kg (大型車平均の2倍)とし、スパン長30 mの橋げたの動的係数を求めた。その結果を図3.10に示す。この図より30 mの橋りょうでは初期条件が大きくなると動的係数が大きくなることがわかる。しかし初期条件が大きい場合は expansion jointによる衝撃であって、時間とともに減衰するので、この影響は30 m以上の橋りょうで小さくなる<sup>10)</sup>。

### 3.5 ランダム自動車荷重列による動的応答

電子計算機の中でシミュレートされたランダム自動車荷重列の1例を表3.6に示す。このランダム荷重列がある一定走行速度で橋げたを走行するときの動的応答を求める。この時の各パラメータは

$$\begin{aligned} \mu &= 0.446 \text{ }^{Y_{mc}} (3.33 \text{ cps}) \\ V &= 16.66 \text{ m/sec } (60 \text{ km/h}) \end{aligned}$$

である。

数値計算の結果を図3.11と図3.12に示す。

次に、計算結果について若干の考察を加える。

図3.12に総重量7740 kgの自動車が1台走行した場合と5台連行した場合についての計算結果を、横軸にスパン長 $\ell$ を縦軸に動的係数 $D_0$ をとってプロットした。図中●は総重量 $W = 7740 \text{ kg}$ ,  $\mu = 0.446 \text{ }^{Y_{mc}}$  ( $T_0 = 0.3 \text{ sec}$ ), 初期変位  $z_0 = 0.672$  ( $\kappa = 0.3$ )の自動車が1台走行した場合であり、○は前記の自動車が5台、車頭間隔 $S = 10 \text{ m}$ の等間隔で連行した場合の各スパン長に対する動的係数である(5台を選んだのは、いま対象として単純支持された50 mまでの橋りょうをとっているので一応満載荷

重であると考えられるからである)。

表 3.6 ランダム荷重列と衝撃係数

(スパン長 30 m, 荷重速度 60 km/h の場合の / 例)

車群 の 番号	車群 の 台数	荷重の重量 (上段) kg と車頭間隔 * (下段) m	スパン中央 点の最大静 たわみ (m)	動 的 係 数 D <sub>c</sub>	同時に載荷 し得る 最大荷重数
1	4	2400 9600 1500 2300 13.0 14.0 12.0	0.389	0.29	3
2	3	6800 800 2200 14.0 14.0	0.260	0.43	3
3	4	700 1000 1600 3000 9.5 10.0 14.5	0.420	0.16	3
4	2	4900 1200 22.0	0.184	0.56	2
5	5	3700 4100 6000 8100 2200 13.0 19.5 15.0 13.0	0.378	0.19	3
6	3	10000 7500 3000 15.0 13.0	0.469	0.26	3
7	6	4400 2100 2100 1200 1800 7600 12.0 13.0 14.0 15.0 16.0	0.312	0.12	3
8	3	2700 2500 1700 15.0 16.0	0.138	0.40	2
9	2	1600 1400 9.5	0.099	0.88	2
10	3	2100 7100 500 14.0 12.0	0.370	0.20	3
11	4	7300 2300 700 1200 18.0 15.0 17.0	0.274	0.42	2
12	2	3100 2400 20.0	0.116	0.70	2
13	5	2900 6300 1700 500 2900 12.0 13.0 13.0 12.0	0.289	0.21	3
14	4	6900 2200 5400 1000 22.0 12.0 17.0	0.259	0.43	3
15	2	2600 600 10.0	0.111	0.62	2

\* 設計活荷重に近い荷重列としたために車頭間隔の平均値は実際の交通流の  
1/5 程度となっている。

この2つの場合について比較すると、自動車1台の場合の動的係数はスパン長25m前後でかなり大きく0.5～0.55を記録している。このことは走行中の自動車の固有振動数をスパン長26m前後の橋りょうのそれに近い値を選んだためであり、この共振スパン長を過ぎると橋げたのスパン長が大きくなるにつれて急激に小さくなっている。さらに5台連行による動的係数について見ると、共振前後のスパン長以外では1台の場合のそれよりかなり小さくなっている。しかし共振スパン長に近い25mの橋りょうでは1台の場合より5台の場合の減少の割合は他のスパン長ほど顕著ではないが、それでもいくらかの減少が認められる。このことは共振状態では種々のパラメータの影響が顕著に現われるためと考えられる。<sup>\*</sup>

このことから、自動車荷重1台による動的係数より数台の連行自動車荷重による動的係数が小さいことがわかる。

つづいて、3.2節で述べたような電子計算機中でシミュレートされた表3.6に示すランダム自動車荷重列による動的係数を計算し、各種スパン長について横軸に最大静たわみを縦軸に最大動たわみ  $y_i$  をとってプロットした 図3.11の(a), (b), (c), (d)にそれぞれのスパン長についての計算結果を示す(初期変位  $z_0(K)$  および  $\mu$  などの定数は前記

の場合と同様になっている)。これらの図で、縦軸と横軸とのスケールを同じくとしてあるので、両軸と角度が45°の線は動倍率  $D_f = 1.0$  (動的係数  $D_c = D_f - 1$ ) の線を表わし、各プロットされた点と原点0とを結ぶ直線の勾配が動倍率を表わすことになる。

この図からたわみが小さい連行荷重列に対する動的係数は大きく、たわみが大きくなるにつれて一般に動的係数は小さくなる傾向にある。<sup>こゝがわかる</sup> われわれが実際に橋りょうの設計に用いている動的係数はかなりたわみの大きい場合を対象としているのであり、ちなみに本計算で用いている橋りょうの設計最大静たわみはスパン30mの橋で15mm、本計算に用いているランダム荷重列による最も大きい静たわみの約2倍に近い(これはランダム荷重列の走行方向を一方向とし、一車線のみをとったためと考えられる)。このことから設計の際の動的係数を検討するにあたっては、たわみの比較的大きい荷重列の動的係数を取るのが妥当であると考え、図3.11の上部実線の勾配をもって平均動的係数とした。同様の方法で

---

\* 第2章のスペクトル解析の結果である図2.3では共振点で減衰定数の影響が大きく現われている。

各スパン長の橋りょうに対するランダム自動車荷重列による動的係数  $D_d$  を求めて (図 3.11(a),(b),(c),(d)参照) 図 3.12 に太い実線で示した。

以上のような過程を経て求めた図 3.12 の太い実線は、20 m 以上のスパン長を有する道路橋の動的係数を表わす曲線であると考えられる。

### 3.6 走行荷重による振動実験の 2, 3 の結果

著者がこれまでに関係したいくつかの実橋に対する走行荷重による振動実験の結果を図 3.13, 図 3.14 および図 3.15 に示す<sup>13)</sup>。

この走行荷重による振動実験の結果は満載荷重に近い状態に積載した (総重量 18 ton 前後) 試験車をおる一定速度で走行せしめ、そのときの橋けたスパン中点の動たわみをたわみ計で記録した値から求めたものである。

これらの結果から自動車荷重 1 台による橋けたの動的係数は速度とともに大きくなることがわかる。また、2 台以上の連行荷重となるといずれの結果からも動的係数は 1 台の場合に比較して、連行台数 (ただし、同時に載荷する台数) に反比例して小さくなることがわかる。

次に走行速度を 30 km/h を基準にして、各地で実験<sup>14)</sup> された 18 橋の実験結果から動的係数を求め、スパン長との関係で整理したのが図 3.16 である。

また、3.4 節で数値計算の結果から求めた包絡線 (図 3.8) をスパン長 10 m を基準にしてその比率の形で整理した通減率を図 3.16 の破線で示した。スパン長 30 m から 60 m までの橋りょうでよく一致している。スパン長が大きくなると実験の動的係数はこの曲線よりさらに小さな値となっている。しかし長スパンの橋りょうについては実験データも少なく、直ちに結論することはできない。一般に長スパンの橋りょうの形式は連続けた形式となることなどから動的係数は小さくなるものと思われる。このことについて第 4 章で若干の考察を加える。

以上、本章においては道路橋上を実際に自動車が行った場合の橋けたの動的応答について解析した。すなわち、3.4 節および 3.5 節では電子計算機の中で設計活荷重に近い自動車荷重列と橋けたとをシミュレートし、自動車荷重列と橋けたの運動方程式を数値積分法によって解析した。いわゆるシミュレーション法によって橋けたの動的応答を求めた。3.5 節においては 2.3 の走行荷重による振動実験の結果から前節の解析結果の裏づけを

行なった。これによって、本章で求められた図 3.12 の太い実線は実際の自動車荷重による道路橋の動的係数に近い曲線であると思われる。

#### 参 考 文 献

- 1) 小堀為雄・吉田博：電子計算機による自動車交通流模型の作成について，金沢大学工学部紀要，Vol. 3，No. 3，45/52，(昭39)。
- 2) 伊吹山四郎：道路交通工学，54/75，金原出版，昭39。
- 3) 渡辺新三・毛利正光・加藤晃：交通工学，土木学会中部支部技術講座テキスト，昭40。
- 4) 西村昭：自動車荷重のばらつきについて，神戸大学建設工学研究所報告，No. 2，213/229，(昭36)。
- 5) 西村昭：荷重列としての自動車交通流の二・三の解析，土木学会誌，Vol. 46，No. 2，37/42，(昭36)。
- 6) 宮武 修・中山 隆：モンテカルロ法，67/80，日刊工業，昭35。
- 7) 建設省土木研究所設計：道路橋標準設計2・活荷重合成けた橋，日本道路協会，昭38。
- 8) 伊藤学，片山恒雄：橋梁構造の振動減衰，土木学会論文集，No. 117，12/22，昭40。
- 9) 山田善一・小堀為雄：自動車走行中の振動特性が橋梁の衝撃係数に与える影響について，土木学会第20回年次学術講演会，I-29，昭40。
- 10) Kobori, T.: Study on Impact of Short Span Highway Bridge, Proc. of the Fifteenth Japan National Congress for Applied Mechanics, 294/299, 1965.
- 11) Newmark, N.M.: Computation of Dynamic Structural Response in the Range Approaching Failure, Proc. of the Symposium on Earthquake and Blast Effects on Structures, 1952.
- 12) Newmark, N.M.: A Method of Computation for Structural Dynamics, Proc. of ASCE, Vol. 85, EM3,

67/94, (1959), or Trans. of ASCE, Vol. 127,  
Part I, 1406/1435, (1962).

- 13) 小堀為雄・安原宗光・増山拓之：下黒部橋（トラスドランガー）の載荷実験について，土木学会中部支部研究発表会，昭42。
- 14) 建設省道路局，同土木研究所：既存橋梁の耐荷力と供用限界について，第19回建設省技術研究発表会資料，昭40。



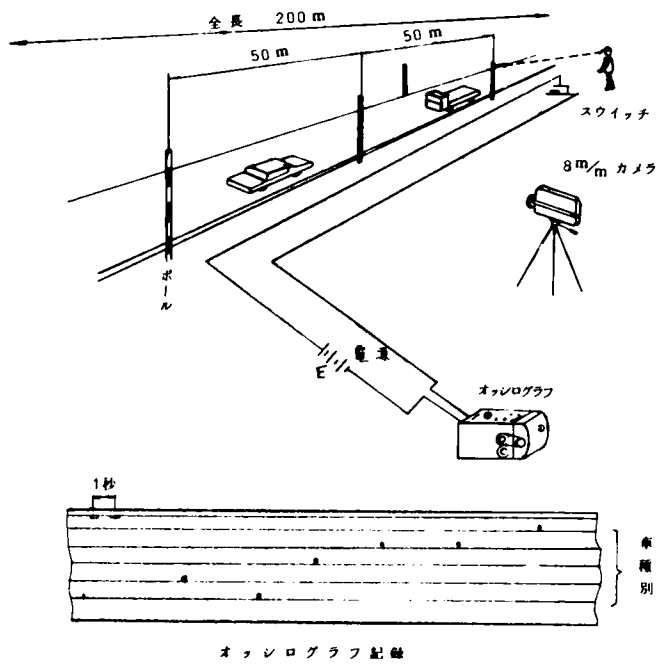


図 3・1 交 通 流 調 査

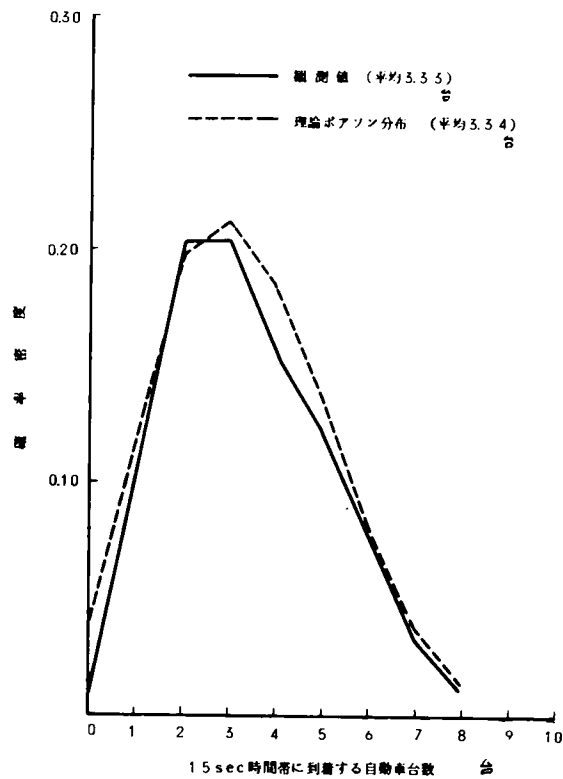


図 3・2 到着台数の確率分布

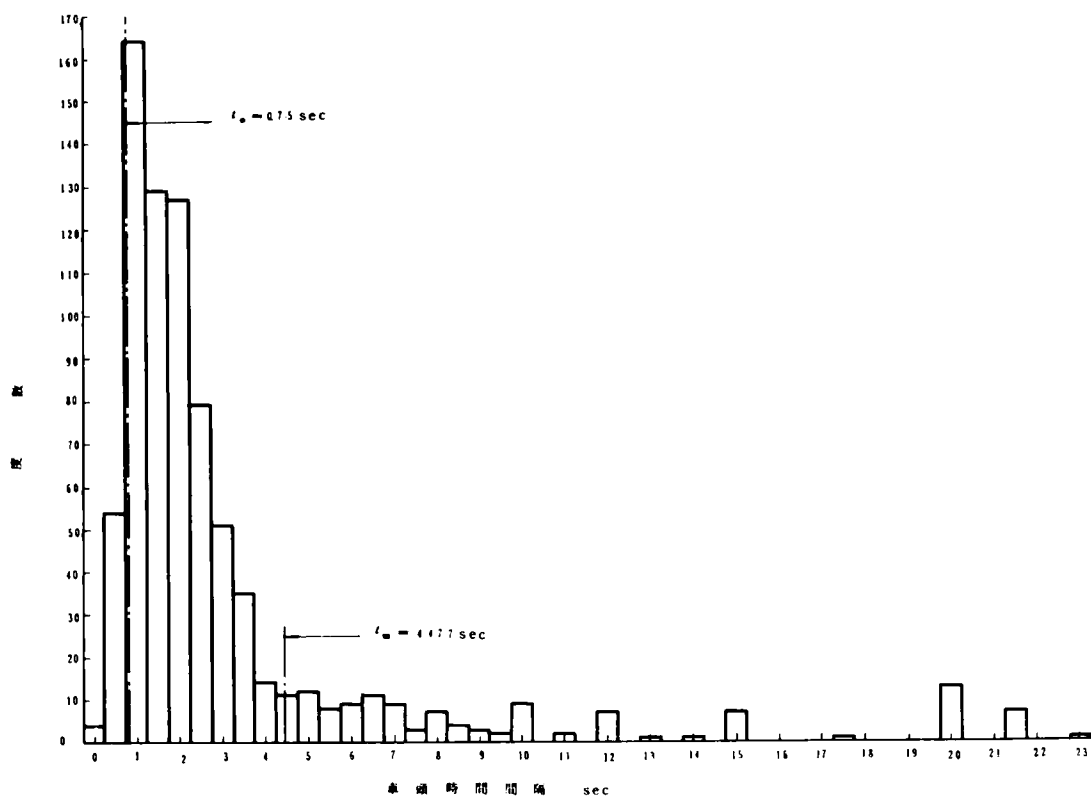


図 3-3 車頭時間間隔分布図 (国道 1 号線彦坂山附近)

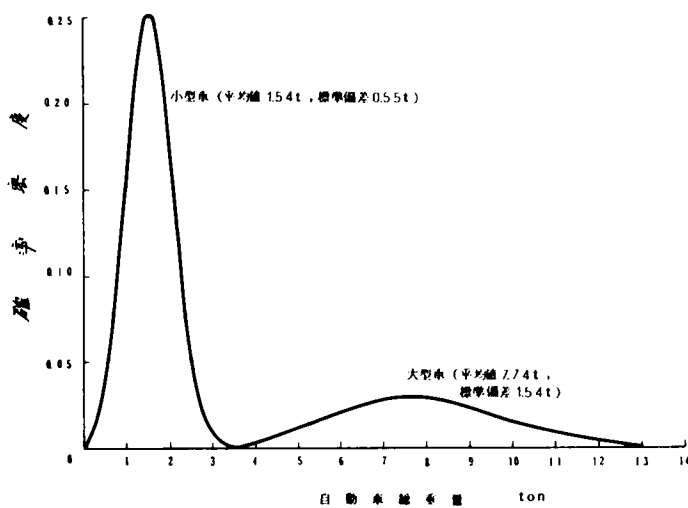


図 3-4 自動車重量の分布 ( $p:q = 3:7$ )  
(建設省近畿地方建設局調べ〔昭和 30 年〕)

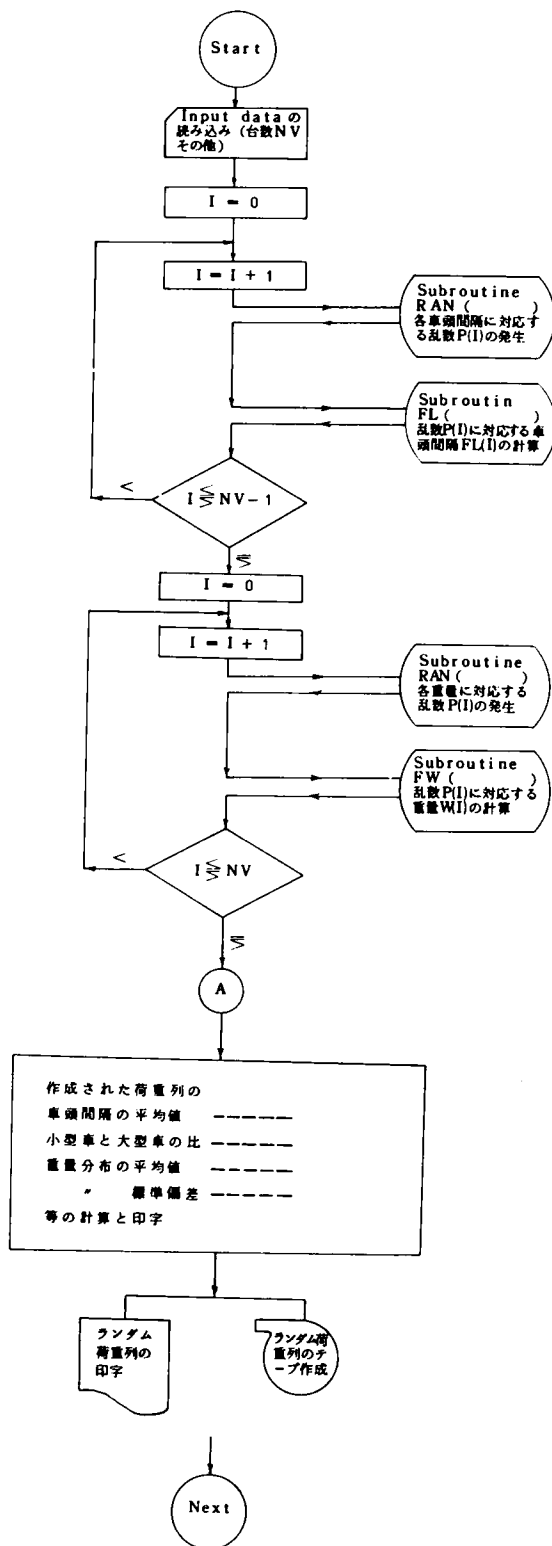


図 3・5 ランダム荷重列模型を作成するプログラムのフローチャート

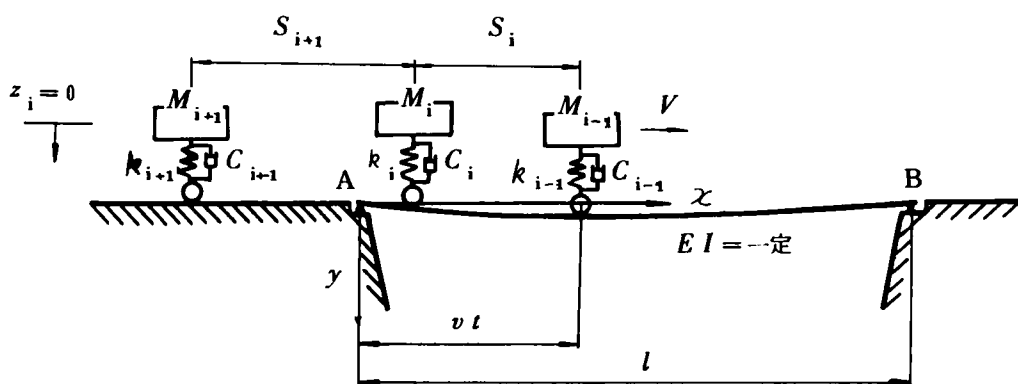


図 3・6 ランダム荷重列と橋の振動模型

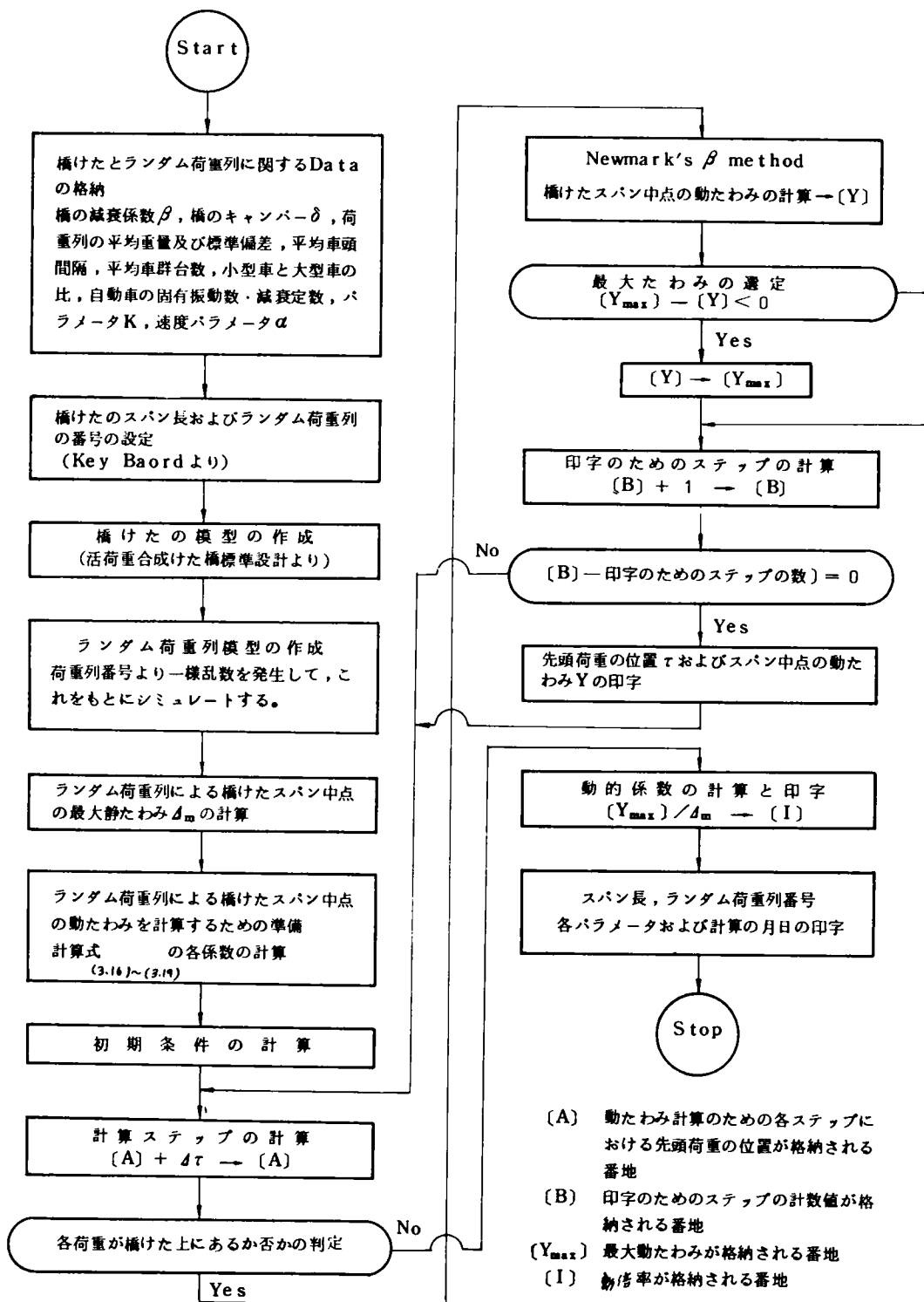


図 3・7 計算のためのフローチャート

$a_1 \quad \mu = 0.446 \text{ (133 cps)} \quad z_0 = 0.672$   
 $a_2 \quad \mu = 0.362 \text{ (10 cps)} \quad z_0 = 0.672$   
 $a_3 \quad \mu = 0.252 \text{ (25 cps)} \quad z_0 = 0.672$   
 $a_4 \quad \mu = 0.162 \text{ (20 cps)} \quad z_0 = 0.672$   
 $b_1 \quad \mu = 0.446 \text{ (133 cps)} \quad z_0 = 0.224$   
 $b_2 \quad \mu = 0.362 \text{ (10 cps)} \quad z_0 = 0.224$   
 $b_3 \quad \mu = 0.252 \text{ (25 cps)} \quad z_0 = 0.224$   
 $b_4 \quad \mu = 0.162 \text{ (20 cps)} \quad z_0 = 0.224$

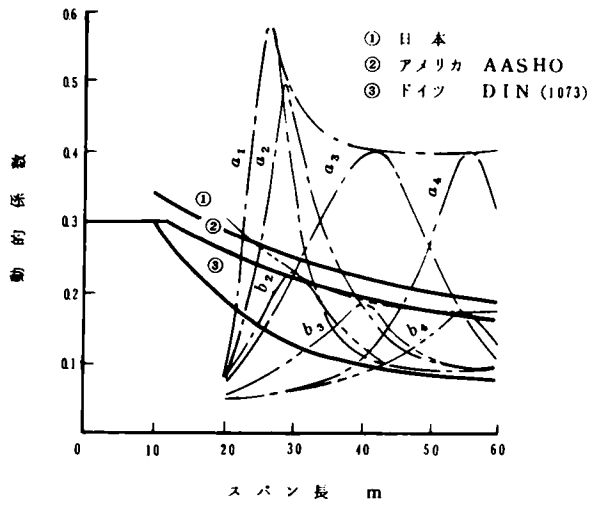


図 3-8 走行荷重 1 台の共振曲線

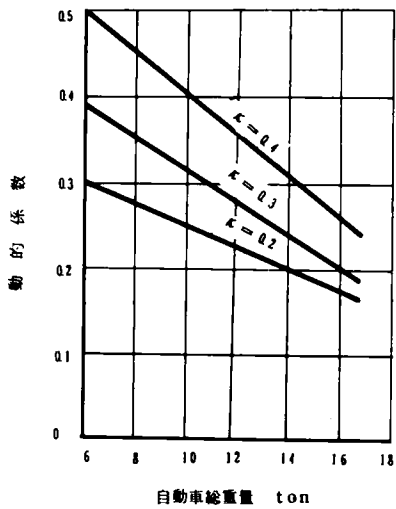


図 3-9 自動車総重量と動的係数  
( $\ell = 30 \text{ m}$ )

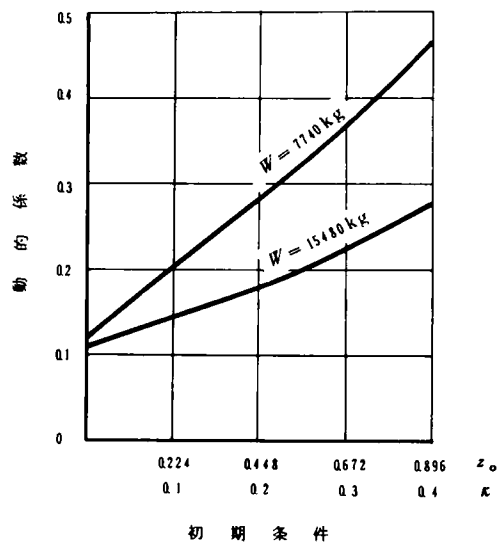


図 3-10 初期条件と動的係数  
( $\ell = 30 \text{ m}$ )

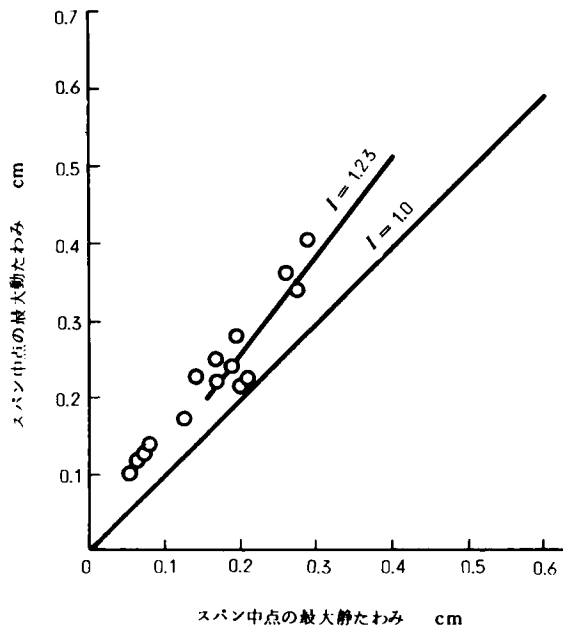


図 3・11 (a) スパン中点の最大静たわみと最大動たわみ  
( $\ell = 22.5 \text{ m}$ )

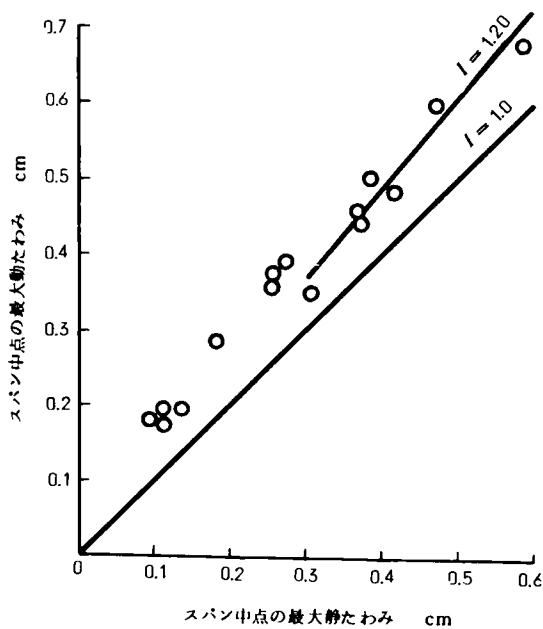


図 3・11 (b) スパン中点の最大静たわみと最大動たわみ  
( $\ell = 30 \text{ m}$ )

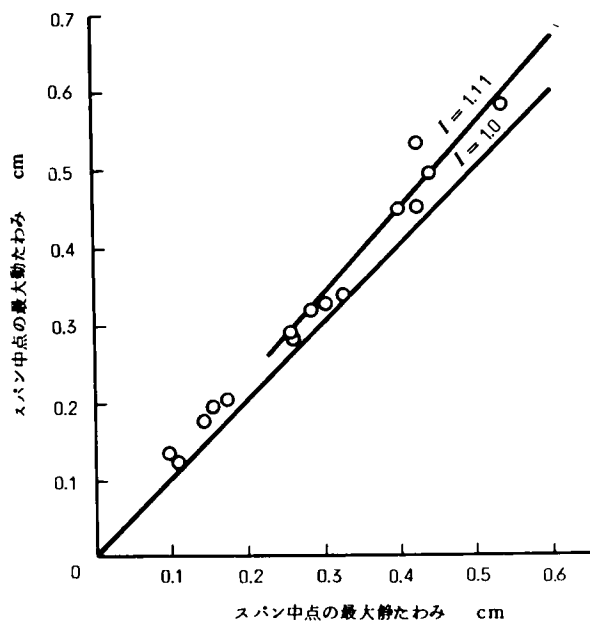


図 3・11 (c) スパン中点の最大静たわみと最大動たわみ  
( $l = 40 \text{ m}$ )

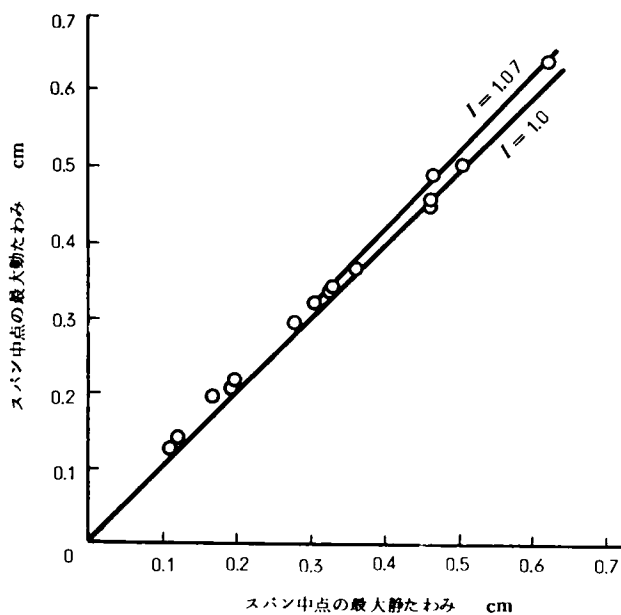


図 3・11 (d) スパン中点の最大静たわみと最大動たわみ  
( $l = 50 \text{ m}$ )



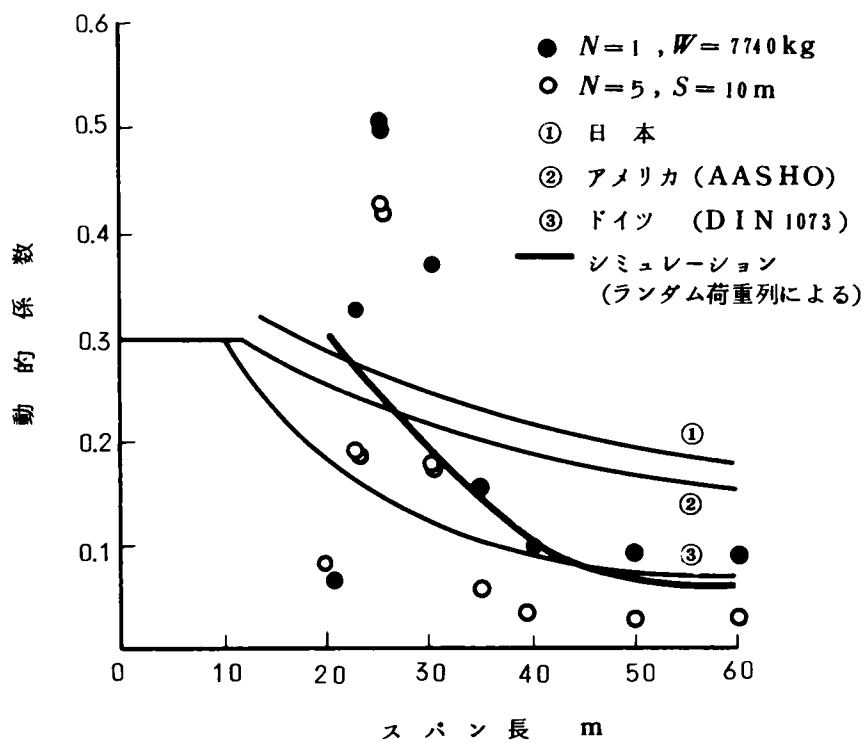


図 3・12 スパン長と動的係数

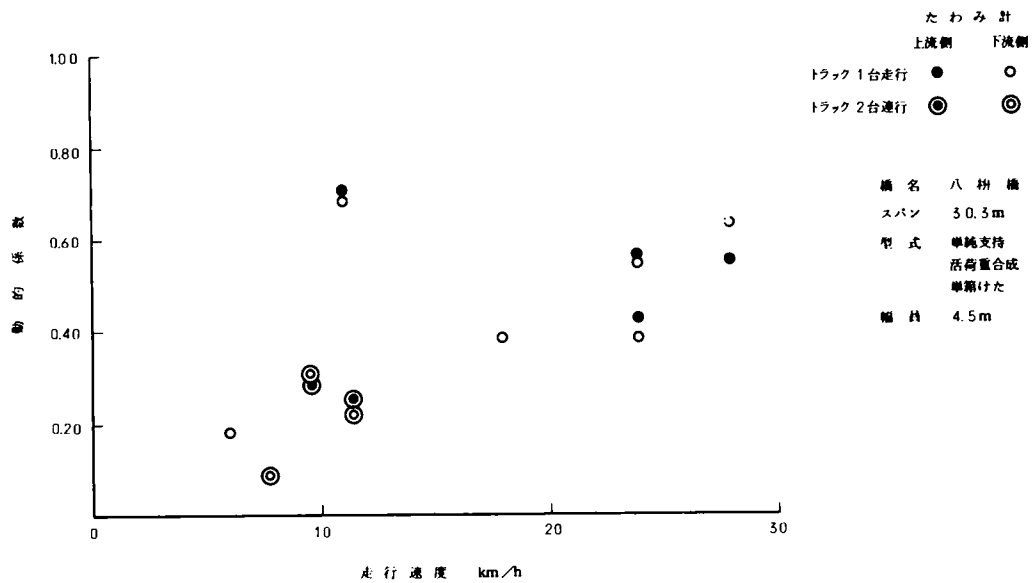


図 3・13 実 験 結 果 No 1

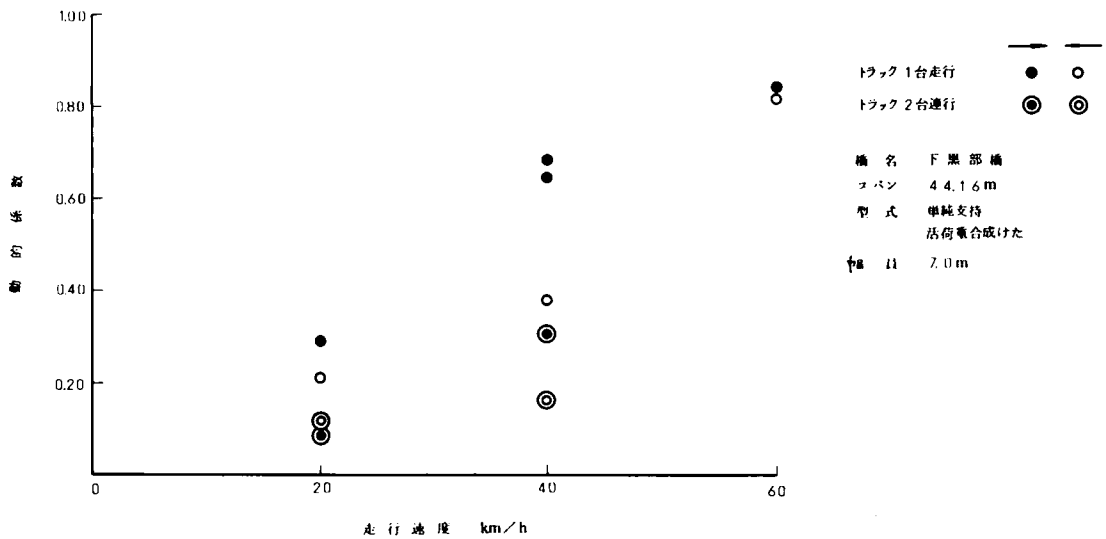


図 3・14 実 験 結 果 No 2

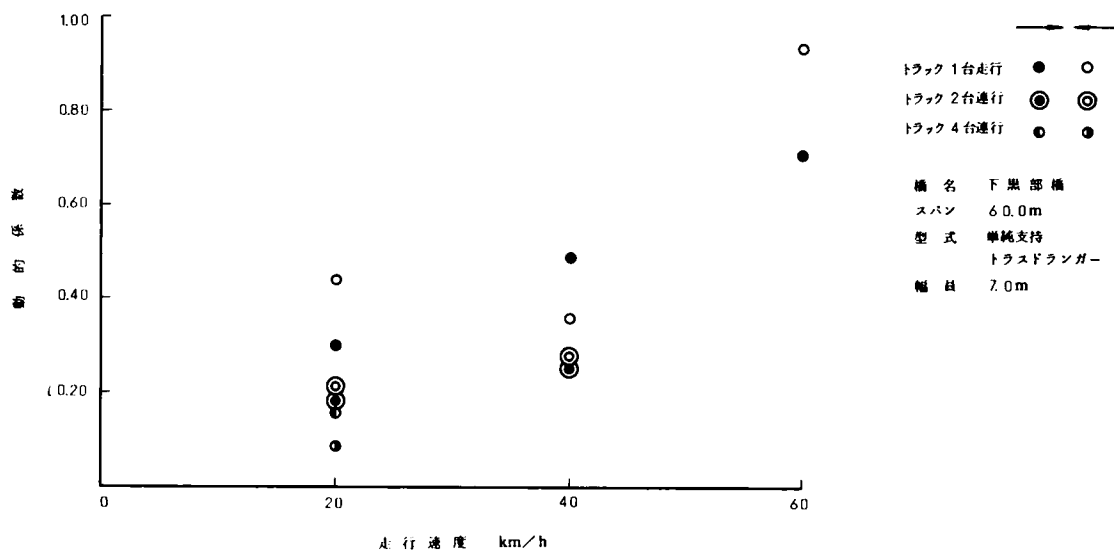


図3・15 実験結果 No 3

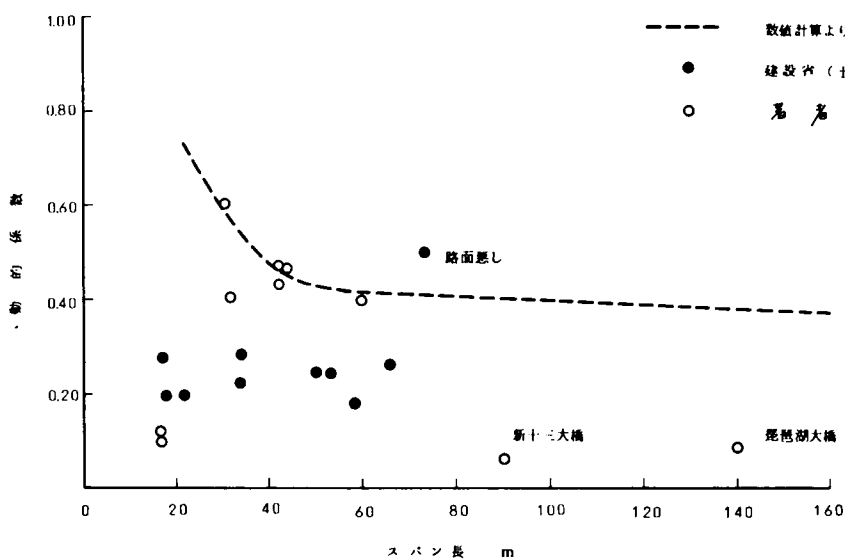


図3・16 1台走行による動的係数とスパン長(実験値)  
走行速度 30 km/h

## 第4章 連続形式橋りょうの固有振動モードと動的応答

### 4.1 概 説

前章までは主として単純けた橋について考察を加えて来たが、スパン長が大きくなると連続けた形式が力学的に単純けた形式に比べて有利となる。このことからこの章では連続けた橋の動的問題について若干の考察を加える。その手法は第2章と同様に不規則振動論を用い、また連続けたは単純けたに比べて基本振動周期と高次振動周期とが接近していることからこれまでの研究のように高次振動を無視することはできないので、ここではモード解析によって考察を進める。これはけたの振動が主として固有振動に支配されるという考え方に立っている。

また、設計活荷重に対する連続けた橋の動的係数についても前第2章と同様にスペクトル解析を行なって、理論値を求めた。

次に、本章の後半において著者が行なった連続けた橋の走行荷重による振動実験の結果をあげ、走行荷重による長大連続けた橋の振動はけたの振動特性にもよるが、基本振動とともに対称2次振動が現われることを論じ、この場合の動的係数は単純けた橋に比べて小さいことを論ずる。さらに、<sup>本章は</sup>けた橋の走行荷重による動的応答の性状はけた橋の固有振動周期とそのモードがわかれば、本章で用いる不規則振動論を用いて比較的容易に求めることができることを立証しようとするものである。

### 4.2 各種けた橋の固有周期とそのモード<sup>1)</sup>

連続けた橋は一般に変断面が多く、スパン割も種々であり、スパンの中間にヒンジを有するもの（ゲルバーけた）など単純けたに比べて固有周期やモードの計算が複雑であることからこれまでは長大スパン橋や、特に実験を行なった橋りょうについてのみ計算が行なわれて来た。しかし橋けたの動的問題を取り扱う場合は、橋けたのもつ固有周期とそのモードは重要な要素となることから短時間でしかも高精度にこれらの値を求めることが必要

となる。

この論文では、これらのことを考慮し、新しい試みとして transfer matrix 法<sup>2),3),4)</sup>によって著者らが研究したサブプログラム<sup>1)</sup>を用いて解析する。

このプログラムは変断面、多スパン連続についても制限はなく、途中にヒンジを持つ場合、固定端の場合などいずれにも適用可能なプログラムであって、サブルーチン<sup>\*</sup>の形で作られている。

著者が計算した例を表 4.1 にあげる。またその振動模型とモードの一例を比較的スパン長の大きい新十三大橋と琵琶湖大橋について図 4.1 と図 4.2 に示す。

表 4.1 で短時間で求められるこのプログラムが比較的に高精度であることがわかる。

#### 4.3 連続けた橋の動的応答<sup>5)</sup>

##### 4.3.1 走行自動車による動的応答

いま、比較のためにスパン割の等しい三径間連続けた橋とその 1 スパンとスパン長の等しい単純けたの固有周期とそのモードを求めると図 4.3 のようになる。この図で対称 1 次周期は両者は等しく、単純けたの逆対称 1 次周期と三径間連続けたの逆対称 2 次周期とが等しく、単純けたの基本周期と次の周期との間に三径間連続けたでは逆対称 1 次、対称 2 次の 2 つの周期が存在していることがわかる。このことは単純けたに比較して三径間連続けた橋の固有周期の間隔は小さく単純けたの場合（第 2 章）のように高次の振動を無視することができないことを意味している。

さて、走行自動車荷重に対するけた橋の動的応答は外力のもつ卓越的な周期とけたのもつ固有周期に敏感であり、ある瞬間においてけたの応答は固有周期に対するモードで振動しているものと考えられる。このことを基本として走行自動車荷重によるけた橋の応答をモード解析の手法を用いて解析する。

---

\* このサブプログラムは〔FMB〕(Natural frequencies and modes of bridge の略である)と呼ばれ、その input data や output data 等このサブプログラムの使用法は参考文献 1) にあげられている。なおプログラムは付録 A .5 にあげる。

表 4.1 各種けた橋の固有周期  
(〔FMB〕による計算結果と他の計算法による計算結果との比較)

形 式 名 橋 スパン長		単 純 け た 5 0 m			3 径間連続鋼床板けた橋 (2 本主けた) 新 十 三 大 橋 9 0 + 9 0 + 9 0 m				
計 算 法		A FMB	B 理論値	$\left  \frac{A-B}{B} \right  \times 100$	A FMB	B FMB	C	$\left  \frac{C-B}{B} \right  \times 100$	$\left  \frac{A-B}{B} \right  \times 100$
単 位		sec	sec	%	sec	sec	sec	%	%
振 動 次 数	1	0.4297	0.4305	1.85	1.237	1.267	1.259	0.6	2.4
	2	0.1074	0.1075	0.09	0.9654	0.9295	0.9230	0.7	3.8
	3	0.0478	0.0478	0.0	0.6612	0.6189	0.6183	0.1	6.8
	4		0.0269		0.3093	0.3271	0.3221	1.5	5.4
	5		0.0172		0.2714	0.2690	0.2688	0.1	0.9
	6		0.0119		0.2213	0.2190	0.2192	0.1	1.0
質 点 数		9	等分布		27	27	27		
断 面		等断面	等断面		等断面	変断面	変断面		
計算時間					52 sec	54 sec			
そ の 他					等間隔	等間隔	等間隔 文献 8)		

形 式 橋 名 スパン長		三径間鋼床板箱けた橋 城 ケ 島 大 橋				三径間ゲルバーけた橋			
		7 0 + 9 5 + 7 0 m				単位 m			
計 算 法		FMB	A FMB	B Rayleigh -Ritz	$\left  \frac{A-B}{A} \right  \times 100$		B FMB	C 小 西 松	$\left  \frac{B-C}{B} \right  \times 100$
単 位		sec	sec	sec	%		sec	sec	%
振 動 次 数	1	1.455	1.0384	1.019	1.9		0.199	0.203	2.0
	2	0.800	0.5952	0.597	0.4		0.156	0.156	0.0
	3	0.618	0.4485	0.524	16.8		0.107	0.107	0.0
	4	0.373	0.2673	0.204	23.7				
	5	0.234	0.1724	0.116	32.7				
	6	0.203	0.1490	0.112	24.8				
質 点 数		63					22		
断 面		変断面					変断面	変断面	
計算時間		151sec					130sec		
そ の 他		等間隔		文献 7)			不等間 隔に分 割	鋼けた のみ 文献 9)	

また、この節では、スパン長の長い連続けた橋の設計動的係数を求めることも目的の一つとしていることから設計活荷重を対象に考える。この場合活荷重の載荷長は各断面の曲げモーメントの影響線から定められる。一般にスパン長の長い中央径間に注目すれば、この径間にのみ活荷重を載荷すればよいことは周知のとおりである。この活荷重に見合う自動車列として第2章と同様に10m等間隔の荷重列を考えて、この荷重列に対する動的係数を計算しスパン長の長い連続けた橋の理論的設計動的係数を求める。

#### 4.3.2 基本計算式

連続けたの*i*次振動は一般座標 $q_i(t)$ と固有関数 $X_i(x)$ で次式のように表わされる。

$$y_i(t, x) = \frac{1}{K_i} q_i(t) X_i(x) \quad (4.1)$$

ここに、 $K_i$ はけたの曲げ剛性に関するパラメータであって、振動周期の2乗に反比例して大きくなる。

いま、図4.4のように連続けたの左支点Aから $x_v$ の位置に第2章でモデル化した自動車が載荷している場合の運動方程式を求める。この場合も第2章の場合と同様にエネルギー法で求めることができる。

すなわち、けたに関する運動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{g} \ddot{y}_{ix} + c_1 A_2 \dot{y}_{ix} + E A_3 y_{ix} - \{ k_T(z_T - y_v) \\ + c_T(\dot{z}_T - \dot{y}_v) \} X_{iv} X_{ix} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

自動車荷重に対する運動方程式は、

$$m \ddot{z} + k_s(z - z_T) + c_s(\dot{z} - \dot{z}_T) = 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} m_T \ddot{z}_T + k_s(z_T - z) + c_s(\dot{z}_T - \dot{z}) \\ + k_T(z_T - y_v) + c_T(\dot{z}_T - \dot{y}_v) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

と表わされる。

ここに、 $A_1$ 、 $A_2$ および $A_3$ は、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \int_0^l w(x) \{X_i(x)\}^2 dx \\ A_2 &= \int_0^l \{X_i(x)\}^2 dx \\ A_3 &= \int_0^l I(x) \{X_i''(x)\}^2 dx \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

であり、 $X_{iv}$ は荷重載荷位置の $i$ 次固有関数値を、 $X_{ix}$ は考えている位置（たとえば測点）における $i$ 次固有関数値を表わす。 $c_i$ は $i$ 次振動モードに対するけたの減衰係数であるが、それらの値の正確な決定は非常に困難である。 $y_v$ は荷重接地点の動たわみであり、橋面の凹凸 $z_0$ を考慮し、 $X$ 点の動たわみ $y_x$ との関係から

$$y_v = (X_{iv}/X_{ix}) y_x + z_0 \quad (4.6)$$

として表わされる値である。その他の記号は第2章（2.2<sup>註</sup>参照）で用いられている場合と同意義である。

さて、第2章と同様に式（4.6）を考慮し 式（4.2）、式（4.3）および式（4.4）をフーリエ変換して、自動車荷重のばね上質量の変位 $z$ とけたの動たわみ $y_x$ との間の伝達関数 $H_{y_x z}$  および橋面の凹凸 $z_0$ とけたの動たわみ $y_x$ との間の伝達関数 $H_{y_x z_0}$ を求めると、

$$H_{y_x z} = \frac{J_2(j\omega^2 - j_4 j_5 + j_2 j_4) X_{iv} X_{ix}}{J_1(J_4 J_5 - J_2^2) - J_2^2 J_4 X_{iv}^2} \quad (4.7)$$

$$H_{y_x z_0} = \frac{(J_3^2 - J_4 J_5 + J_2 J_4) X_{iv} X_{ix}}{J_3(J_1 - J_2 X_{iv}^2)} \quad (4.8)$$

となる。ここに、 $J_1$ 、 $J_2$ 、 $J_3$ 、 $J_4$  および  $J_5$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= (A_1/g)(j\omega)^2 + c A_2(j\omega) + E A_3 + (k_T + c_T(j\omega)) X_{iv}^2 \\ J_2 &= k_T + c_T(j\omega) \\ J_3 &= k_s + c_s(j\omega) \\ J_4 &= m(j\omega)^2 + k_s + c_s(j\omega) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$



$$J_s = m_T(j\omega)^2 + k_T + k_s + (c_T + c_s)(j\omega)$$

である。

入力関数として $z$ または $z_0$ をとり、そのパワースペクトル密度をそれぞれ $S_z(\omega)$ および $S_{z_0}(\omega)$ として、その入力関数に対する応答関数を点 $X$ の動たわみ $y_x$ にとってそのパワースペクトル密度を $S_{y_x}(\omega)$ とするとそれぞれのパワースペクトル密度は式(4.10)で表わされる。

$$S_{y_x z}(\omega) = \overline{H_{y_x z}(j\omega)} \cdot H_{y_x z}(j\omega) S_z(\omega) \quad (4.10)$$

$$S_{y_x z_0}(\omega) = \overline{H_{y_x z_0}(j\omega)} \cdot H_{y_x z_0}(j\omega) S_{z_0}(\omega) \quad (4.11)$$

ここに、 $j$ は $\sqrt{-1}$ であり、 $\overline{\quad}$ は共役複素数を表わす。

橋面の凹凸のパワースペクトル密度 $S_{z_0}(\omega)$ が既知ならば式(4.11)

から応答関数 $y_x$ のパワースペクトル密度を求めることができる。いま、入力関数 $z_0$ のパワースペクトル密度 $S_{z_0}(\omega)$ を第2章の場合と同様に川合・森崎<sup>6)</sup>によって求められた値を単純化した

$$S_{z_0}(\omega) = \frac{1}{V} (a \omega^{-n}) \quad (4.12)$$

を用いる。ここに $V$ は自動車の速度(m/sec)であり、 $a$ および $n$ は路面によって定まる値であるが、ここでは図2.2で示される値を用いる。特に $a$ は路面の平滑性を表わすパラメータであり、最終的には第2章と同様に図2.2の値の10倍を用いる。

以上は1台載荷の場合であるが、実際の設計活荷重に対する動的応答について以下で解析する。前述のように一般に連続けた橋の中央径間は側径間に比べて長い、少なくとも等しい場合が多いのでこの節では中央径間について論じた。この場合の活荷重は中央径間にのみ載荷して設計が行なわれる。また、設計活荷重に見合う自動車列として第2章と同様に車頭間隔10mの荷重列を考える。これらの荷重による橋けたの任意点 $X$ の動たわみの動的応答は第2章2.4節と同様にして求めることができる。

すなわち、いま任意点 $X$ の $i$ 次モードに対する動たわみのパワースペクトル密度は( $i$ 次モードであることを示すサフィックス $i$ を省略する)

$$S_{y_{xn}}(\omega) = |H_{x1}(j\omega)|^2 S_{z_1}(\omega) + |H_{x2}(j\omega)|^2 S_{z_2}(\omega) \\ + |H_{x3}(j\omega)|^2 S_{z_3}(\omega) + \dots + |H_{xn}(j\omega)|^2 S_{z_n}(\omega) \quad (4.13)$$

いま、各自動車の上下振動の変位パワースペクトル密度は等しいとすれば、式(4.13)は

$$S_{y_{xn}}(\omega) = \{ |H_{x1}(j\omega)|^2 + |H_{x2}(j\omega)|^2 + \dots + |H_{xn}(j\omega)|^2 \} S_z(\omega) \quad (4.14)$$

となる。ここに、 $H_{xn}$  は点 $n$ に載荷した自動車の振動と橋けたの任意点の動たわみとの間の伝達関数である。点 $n$ を点 $X$ に選り1台のみ載荷した場合の点 $X$ の動たわみのパワースペクトル密度は

$$S_{y_{xx}}(\omega) = |H_{xx}(j\omega)|^2 S_z(\omega) \quad (4.15)$$

となる。このとき各点1, 2, ...,  $n$ の動たわみと  $y_{xx}$  との関係はそれぞれの点での固有関数値を用いて次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} y_{1x} &= (X_1/X_x) y_{xx} \\ y_{2x} &= (X_2/X_x) y_{xx} \\ &\vdots \\ y_{nx} &= (X_n/X_x) y_{xx} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

荷重を各点1, 2, ...,  $n$ に載荷して点 $X$ の動たわみを求めるときは、相反作用の原理により式(4.16)の左辺の $y$ のサフィックスを入れかえればよい。このことから式(4.14)を式(4.15)の  $S_{y_{xx}}(\omega)$  を基準にして表わせば、

$$S_{y_{xn}}(\omega) = \{ |X_1|^2 + |X_2|^2 + \dots + |X_n|^2 \} \frac{S_{y_{xx}}(\omega)}{|X_x|^2} \quad (4.17)$$

となる。この式は第2章の式(2.35)に相当する式である。

固有関数  $X_n$  および点 $X$ のパワースペクトル密度  $S_{y_{xx}}(\omega)$  (式(4.15)より)が

既知ならば、荷重列による点 $X$ の動たわみのパワースペクトル密度を式(4.17)から求めることができる。

さらに、パワースペクトル密度から2乗平均値 $\overline{y_{xn}^2}$  (r.m.s.)、を求めれば式(2.22)より

$$\overline{y_{xn}^2} = \frac{\{|X_1|^2 + |X_2|^2 + \dots + |X_n|^2\}}{|X_x|^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_{xx}}(\omega) d\omega \quad (4.18)$$

一方、任意点 $X$ の静たわみは、任意点 $X$ に1台の自動車が載荷した時の任意点 $X$ の静たわみを $\delta_x$ とすれば、基本固有関数 $X_{1i}$ を用いて

$$\delta_{xn} = \frac{(X_{11} + X_{12} + \dots + X_{1n})}{X_x} \delta_x \quad (4.19)$$

第2章と同様に動たわみを標準偏差に対する動的係数の形で表わせば

$$D_{cn} = \frac{\sqrt{\overline{y_{xn}^2}}}{\delta_{xn}} = \frac{\sqrt{\{|X_1|^2 + |X_2|^2 + \dots + |X_n|^2\}}}{(X_{11} + X_{12} + \dots + X_{1n})} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_{xx}}(\omega) d\omega} = \psi_n D_{c1} \quad (4.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} \psi_n &= \frac{\sqrt{\{|X_1|^2 + |X_2|^2 + \dots + |X_n|^2\}}}{(X_{11} + X_{12} + \dots + X_{1n})} \\ D_{c1} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_{xx}}(\omega) d\omega} = \frac{\sqrt{\overline{y_{xx}^2}}}{\delta_x} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

ここに、 $\psi_n$ は式(2.40)と同様に載荷台数による逓減率であり、 $D_{c1}$ は式(2.41)と同様に1台載荷の場合の動的係数である(ただし、標準偏差 $\sigma$ で表わされている)。

### 4.3.3 数 値 計 算

数値計算にあたっては比較的スパン長の大きい新十三大橋と琵琶湖大橋を例にとって解析する。

数値計算は、まず橋の固有周期と固有関数をサブプログラム〔FMB〕<sup>A.5</sup>で求め、各次数の振動について、点 $X$ を中央径間のスパン中点とスパン1/4点付近に選んで、1台

載荷による点Xの動たわみのパワースペクトル密度  $S_{y_{xx}}(\omega)$  を式(4.7)、式(4.8)式(4.10)および式(4.11)から求め、この値を用いて式(4.21)、より1台載荷の場合の各振動次数における動的応答の2乗平均値 (r.m.s) を求める。この時のプログラムのフローチャートを図4.5に示した。

数値計算の結果を図4.6に示した。

ここで、第2章と同様に式(4.12)の橋面の凹凸の平滑度パラメータ  $\alpha$  を図2.2の実測値の10倍をとり、2乗平均値 (r.m.s) の平方根をとって、標準偏差  $\sigma$  を求め、この  $\sigma$  の2倍、すなわち  $2\sigma$  をとり、これを静たわみ  $\delta_s$  で割って1台の自動車による動的係数を求めると表4.2の値となる。この場合、新十三大橋では対称2次の振動の (r.m.s) が他の次数の振動の (r.m.s) に比べて大きいのでこの値をとったが、琵琶湖大橋では基本振動に対する (r.m.s) と対称2次振動に対する (r.m.s) が接近している。このことはいつれの振動も起り得ることを意味しているので、ここでは両者の内大きい方の値を採用して理論動的係数とした。

次に、設計活荷重に対する動的係数を求める。

この場合、各振動次数に対する動的応答の2乗平均値 (r.m.s)  $i$  は式(4.18)から求められる。その計算値を図4.7に示す。これらの値を式(4.20)および式(4.21)に代入して、動的係数を求める。この場合も1台載荷の場合と同様に橋面の平滑度パラメータ  $\alpha$  を実測値の10倍にとり、標準偏差  $\sigma$  の2倍、すなわち  $2\sigma$  で整理し、各振動次数に対する値の大きいものをもって表4.2に示した。

表 4.2 活荷重に対する連続けた橋の動的係数

	1台の自動車による		設計活荷重に対する		実 験 値
	解 析 値	実 験 値	解 析 値	提案した式(5.5)より の 値	
新十三大橋	0.065	0.047 <sup>1)</sup>	0.022 <sup>*</sup>	0.067	0.01 <sup>3)</sup>
琵琶湖大橋	0.050	0.085 <sup>2)</sup>	0.018	0.043	0.06 <sup>4)</sup> 0.035 <sup>5)</sup>

1) 試験車 17.90 ton

2) 試験車 14.85 ton

3) 試験車 2台

4) バス 2台

5) 一般交通の平均値

\* 格点割の関係で荷重列の車頭間隔は9mとなっている。

これらの整理法はすべて第2章と同様であり、自動車の各諸元も第2章(表2.1)と同様である。

#### 4.3.4 実 験 例

数値解析を行なった新十三大橋と琵琶湖大橋について走行荷重による振動実験を行なったのでその結果について述べる。

##### a) 新十三大橋 (昭和41年10月完成)

この橋は一般国道176号線(十三バイパス)の淀川に十三大橋に隣接して架設された三径間連続2本主けた鋼桁けた橋であり、そのスパン割は90m+90m+90mの等スパンである。

走行荷重による振動実験は完成直前に4台の走行試験車によって行なわれ、その時の橋けたの振動は第一径間および中央径間のそれぞれの中央断面に設置した動たわみ計と橋りょう用鉛直振動計および動歪計で測定した。

その時の走行速度と動的係数の関係を図4.8に示す。また、動たわみ計の記録から各波形の周期とその周期が現われる度数をグラフに示すと図4.9となる。この図から走行中の橋けたの卓越周期は0.65 sec であり、この周期は本橋の対称2次の周期0.618に近い振動周期である。

##### b) 琵琶湖大橋 (昭和39年10月完成)

この橋は周知のとおり琵琶湖の湖上に架けられた橋で主部はわが国最長スパンをもつ三径間連続箱桁橋(95m×140m×95m)であり、床板には鋼床板が採用され、主要部材は高張力鋼で、現場接合は高張力ボルトで行なっているなど、わが国におけるこの種の橋形式中技術的に興味ある問題を含んでいる。このことから完成後主として走行荷重による振動特性を調査するために昭和41年夏動の実験が行なわれた。そのときの結果の内、本研究に関連するものについてのみ以下に記す。

実験は走行試験車1台による走行試験と、一般交通荷重車による試験にわけて行なわれ、その振動記録は中央径間の中央断面に設置した鉛直振動計および動的歪計で行なった。

試験車による場合も一般交通による場合もいずれの場合もその応答の動的係数は小さく、試験車による結果は図4.10のようであり、一般交通による結果は小型車1台によるもっとも大きい場合で0.134という記録があったが、これが大型車となり、さらに2台以上の連行荷重となると急激に小さくなって0.064以下(平均値は0.03程度)となっている。このことは前4.3.3節の結果を裏づけている。

また、鉛直振動計の記録をデータレコーダーにとって相關器にかけ、振動波形（速度）の自己相關関数を求め、その結果から変位パワースペクトル密度を求めると図 4.11 のようになる。

この図 4.11(a)で見られるように橋けたの振動は不規則な振動であり、その変位パワースペクトル密度<sup>\*</sup>が同図(b)である。この図で、1.34 sec (0.75 cps)、0.62 sec (1.61 cps) および 0.24 sec (4.17 cps) の周期のところにピークがあり、これらの値は本橋の対称 1 次、2 次および 3 次の周期（図 4.2）とよく一致しているのでこれらを対称 1 次、2 次および 3 次振動に対応するパワースペクトル密度とみなすことができる。<sup>\*\*</sup>さて図 4.11(b)で、対称 1 次と 2 次の振動に対するパワースペクトル密度の大きさが接近している（大小の関係が走行自動車によって逆の場合もある）、このことは、新十三大橋では対称 2 次の振動が非常にけんちょに現われていたのに比べて琵琶湖大橋では対称 1 次の基本振動とともに対称 2 次の振動が現われていることを意味している。

しかし、図 4.11(b)は変位のパワースペクトル密度で表わされているがこれを速度または加速度のパワースペクトル密度で表わすと対称 2 次振動のパワースペクトル密度は基本振動およびその他の次数の振動に対するそれに比べて非常に大きくなる。このことは、本橋のように基本振動周期の長い橋りょうでは対称 2 次の振動が人体によく感ずることを意味している。この点興味深い。

#### ｃ) そ の 他

その他、この種の実験として城ヶ島大橋<sup>7)</sup>（三径間連続箱けた橋 70 m + 95 m + 70 m）の報告があるが、この場合は上記 2 つの報告と同様対称 2 次の振動が現われていることが報告されている。

#### 4.3.5 考 察

以上走行自動車による橋けたの振動は走行自動車の固有周期と橋けたの固有周期との関係から定まり、特に連続けた橋にあつては固有周期が接近していることから必ずしも基本周期の振動が卓越的に起るとは限らない。前記 3 橋のように基本周期が 1.2 ~ 1.5 sec といった比較的周期の長い橋では対称 2 次の振動が現われることがあり、これはけたのも

---

\* 記録は速度で測られているので、まず速度パワースペクトル密度を求め、式(2.20)から逆算して変位パワースペクトル密度を求めている。

\*\* 逆対称振動が現われていないのは測点をスパン中点に選んだためである。

つ振動特性や自動車荷重のもつ振動特性から本論文の解析法を用いて求めることができる。その結果は実験結果ともよく一致した。このことは連続けたの対称2次の振動モードが他の形式のモードに比べて特有のものであり、また、基本周期にくらべて、自動車の固有周期に近いこと等によるものと思われる。

さて、連続けた橋を設計する際の活荷重は求めようとする各断面の部材力または曲げモーメントなどが最大となるよう活荷量の載荷長を選ぶものであり、第2章2.4節および2.5節と同様に載荷台数が多くなると動的係数は小さくなることを4.3.3節で求めた。このことは新十三大橋および琵琶湖大橋の実験結果からもわかることである。

設計活荷重に対する設計動的係数は4.3.3節および4.3.4節の実験結果から求められる。すなわち、4.3.3節の理論解析の結果としての表4.2は橋面の凹凸としての実測値(図2.2)が比較的平滑度の良好な名神高速道路での値であるので、一般の道路ではこれらより平滑度が低いことが考えられることから式(4.12)の係数 $\alpha$ (平滑度パラメータ)を実測値の10倍をとって考えている。また、第2章と同様に動的係数として標準偏差 $\sigma$ の2倍、すなわち、 $2\sigma$ の値をとっているので少なくとも98%がこの中に含まれることになる。このことから設計活荷重に対する設計動的係数は新十三大橋および琵琶湖大橋にあってそれぞれ表4.2の値が理論値と考えられる。

この値は実験値に近い値である。なお、この節での解析法および整理法(パラメータ $\alpha$ および標準偏差 $2\sigma$ 等の取り方)はすべて第2章と同じようになっている。

#### 4.4 ヒンジを有するけた橋の動的応答<sup>10)</sup>

一般にヒンジを有するゲルバー橋やデビダーク工法による形式などは振動が大きい橋とされている。

それには種々の要因が考えられるが、その一つとしてヒンジ点におけるたわみ角の不連続による輪荷重の衝撃作用が考えられる。

著者はこのことに注目して、その影響を解析するために両端固定・スパン中点にヒンジを有するけたについて、移動輪荷重によるけたの衝撃問題について考察した。その結果ヒンジにおけるたわみ角の不連続による衝撃作用が大きく、解析結果と実験値がよく一致することを立証することができた。

以下にその概要を述べる。

#### 4.4.1 理論式の誘導

図4.12のように両端固定・スパン中央にヒンジを有する等断面けたに移動荷重が作用する際のけたの動たわみは、ヒンジ点を通過する時の移動荷重の運動量の急激な変化による衝撃力を考慮して次のように表わされる。

移動荷重によるけたの運動方程式

(i) ヒンジ通過前

$$\ddot{q}_i + \frac{EIg}{w} \left( \frac{k_i}{\ell} \right)^2 q_i = \frac{Mg}{2w\ell} \phi_i - \frac{Mg}{2w\ell} \phi_i$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \ddot{q}_j \phi_j + 2 \left( \frac{k_i v}{\ell} \right) \dot{q}_j \phi_j + \left( \frac{k_i v}{\ell} \right)^2 q_j \phi_j' \right\} \quad (4.22)$$

ここに、 $q_i$ 、 $q_j$ は $i$ 、 $j$ 次振動の一般座標、 $\phi_i$ 、 $\phi_j$ は $i$ 、 $j$ 次振動の固有関数、 $k_i$ はけたの固有値、 $v$ は移動荷重の速度、 $M$ は移動荷重の質量、 $w$ はけたの単位長さ当りの重量、 $\ell$ はスパン長の $1/2$ である。

(ii) ヒンジ通過時

この時の移動荷重とけたのたわみとの関係は図4.13のように表わされ、荷重がヒンジを通過する瞬間において、けたの変位は変わらないが、けたのもつ速度が瞬間的に変化するものと考えられ、その時けたの動たわみの速度 $\dot{y}$ は

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\tilde{q}}_i \phi_i(x) \quad (4.23)$$

ここに、

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{2 R_1 \phi_i(x-l) \cos \theta_2}{R_1 \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^2(x-l) \cos^2 \theta_2 + 1} \cdot \left( - \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\tilde{q}}_i^{(0)} \phi_i(x-l) \cos \theta_2 + v_r^{(0)} \right)$$

$$+ \dot{\tilde{q}}_i^{(0)} \quad (4.24)$$

である。 $\dot{\tilde{q}}_i^{(0)}$ はヒンジ点に移動荷重が達した瞬間のヒンジ点の鉛直方向の速度であり、 $v_r^{(0)}$ は衝突直前における移動荷重の法線方向の速度である。



### (iii) ヒンジ通過後

衝撃期間はけたの基本振動周期に比べて非常に短いと考えられるので、けたは  $t = \ell/v$  なる時刻で瞬間的に式(4.24)で与えられる速度になっている。この速度を今考えている期間の初期条件として式(4.22)からこの期間の動的応答を求めることができる。

#### 4.4.2 数 値 計 算

この種の道路橋の一例としてスパン長  $26.7 + 60.0 + 26.7$  m (名神高速道路釈迦池橋) のデイビダーク形式橋りょうの基本周期は  $0.6$  sec 前後であり、基本周期で主として振動しているものと考えられることから、数値計算にあたっては基本振動のみをとって計算する。

計算はけたの初期条件を  $y(t_0) = 0$ ,  $\dot{y}(t_0) = 0$  として式(4.22)および式(4.24)を Newmark の  $\beta$  法によって、KDC-I 京都大学電子計算機で行なった。

なお、計算には次のパラメータを用いた。

$$R_1 = \frac{Mg}{2w\ell} \quad \text{重量パラメータ}$$

$$\alpha = \frac{v}{\ell} \sqrt{\frac{\Delta_0}{g}} \quad \text{速度パラメータ}$$

$\Delta_0$  : スパン中点の最大静たわみ。

計算の結果を図 4.14 および図 4.15 の実線で示す。

#### 4.4.3 模 型 実 験

上記の理論を裏づけるために図 4.16 に示すような、スパン  $2$  m の試験けたおよび試験装置を製作して実験した。この時の結果を図 4.14 および図 4.15 の破線および○で示した。

#### 4.4.4 考 察

図 4.14 および図 4.15 で理論計算値と実験値がよく一致していることがわかる。また、図 4.14 でヒンジ点での衝撃を考慮しないとけたの動倍率は小さく実験値とあわないことがわかる。このことからヒンジを有するけたの振動は主としてヒンジ点におけるたわみ角の不連続による衝撃作用であることがわかる。

また、両端固定・スパン中点にヒンジを有するけたの中点に荷重  $P$  が載荷した場合のけたのスパン中点の静たわみはスパンの同じ単純けたの中点に  $P$  が載荷した場合の静たわみに等しい。また設計示方書ではこのような場合の動的係数の算定に用いる載荷長は全スパンをとることになることから単純けたと同じ動的係数となる。このことからこのようなヒ

ンジを有するけたの動的係数は多少大きくとる必要がある。その大きさは、橋の種類にもよるが、一般的な形式として三径間連続けた橋を考えると、パラメータ $\alpha$ は0.01～0.04の間にあり、図4.15から単純けたに比べて動的係数にして約4倍となっている。

このことからこの種の形式橋の動的係数はヒンジを有しない一般けた橋と同じように考えることは不適当と思われるので、この論文で導く設計動的係数からは除外して考えることにする。なお、ゲルバー橋などは本節の形式とは多少異なるので、この解析のみから結論することはできないものと思われる。

#### 参 考 文 献

- 1) 山田善一・小堀為雄：けた橋の固有周期と固有関数を求めるプログラムについて，土木学会誌，Vol. 52，No. 9，(昭42)． 登載予定．
- 2) Pestel E.C. and Leckie F.A.: Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, New York, 1963.
- 3) Hurty, W.C. and Rubinstein, M.F.: Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Canada, 1964.
- 4) Thomson, W.T.: Vibration Theory and Applications, Prentice-Hall, New Jersey, 1965.
- 5) 山田善一・小堀為雄・中村幾雄：不規則振動論による道路橋の動的応答，土木学会22回年次学術講演会1-148，昭42．
- 6) 川合平夫・森崎健二：自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性，三菱重工技報，Vol. 2，<sup>No. 2</sup>20/27，昭40．
- 7) 城ヶ島大橋応力測定委員会，城ヶ島大橋応力測定報告書，40/44，技報堂，昭36．
- 8) 大阪市土木局・三菱重工KK：新十三大橋の固有周期，昭41．
- 9) Konishi, I. and Komatsu, S.: Vibration Behavior of Gerber Beam, Technical Report, Vol. 6, No. 3,

294/299, Engineering Research Institute, Kyoto  
University, (1956).

- 10) 山田善一・小堀為雄：桁橋ヒンジにおける衝撃とその影響に関する研究，土木学会  
論文集，No. 106，1/9，（昭39）。

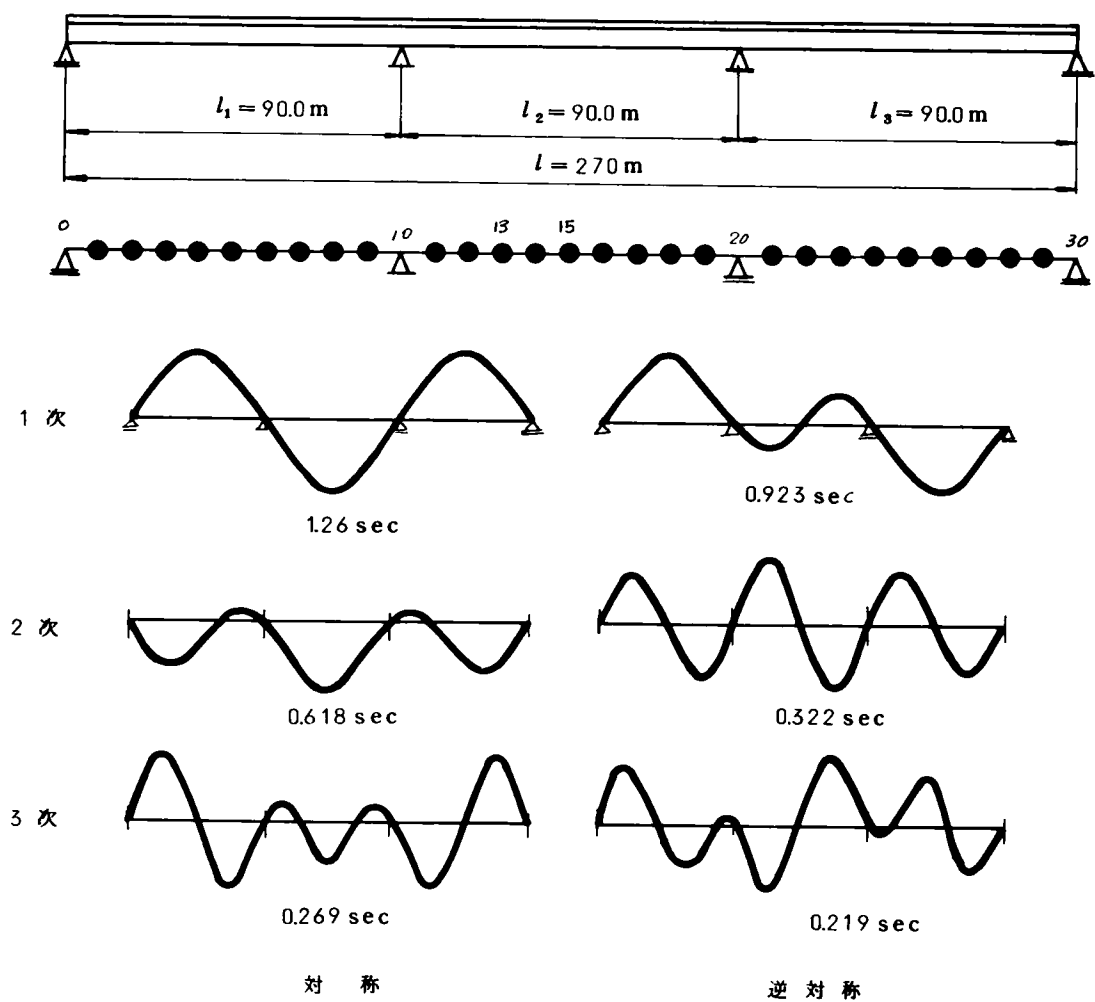


図 4・1 新十大大橋の振動模型，  
固有周期とそのモード

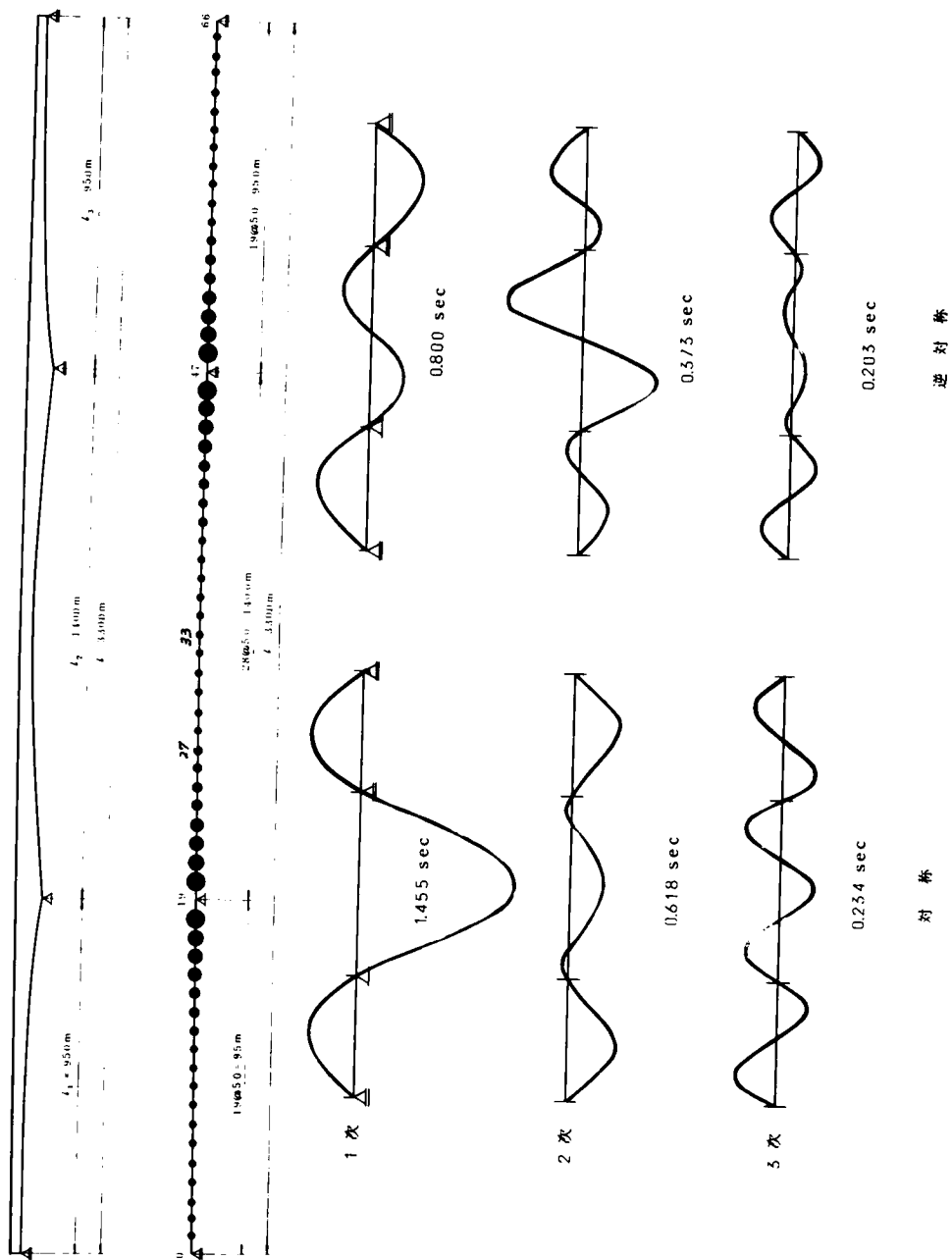


図 4・2 琵琶湖大橋の振動模型，  
振動周期とそのモード

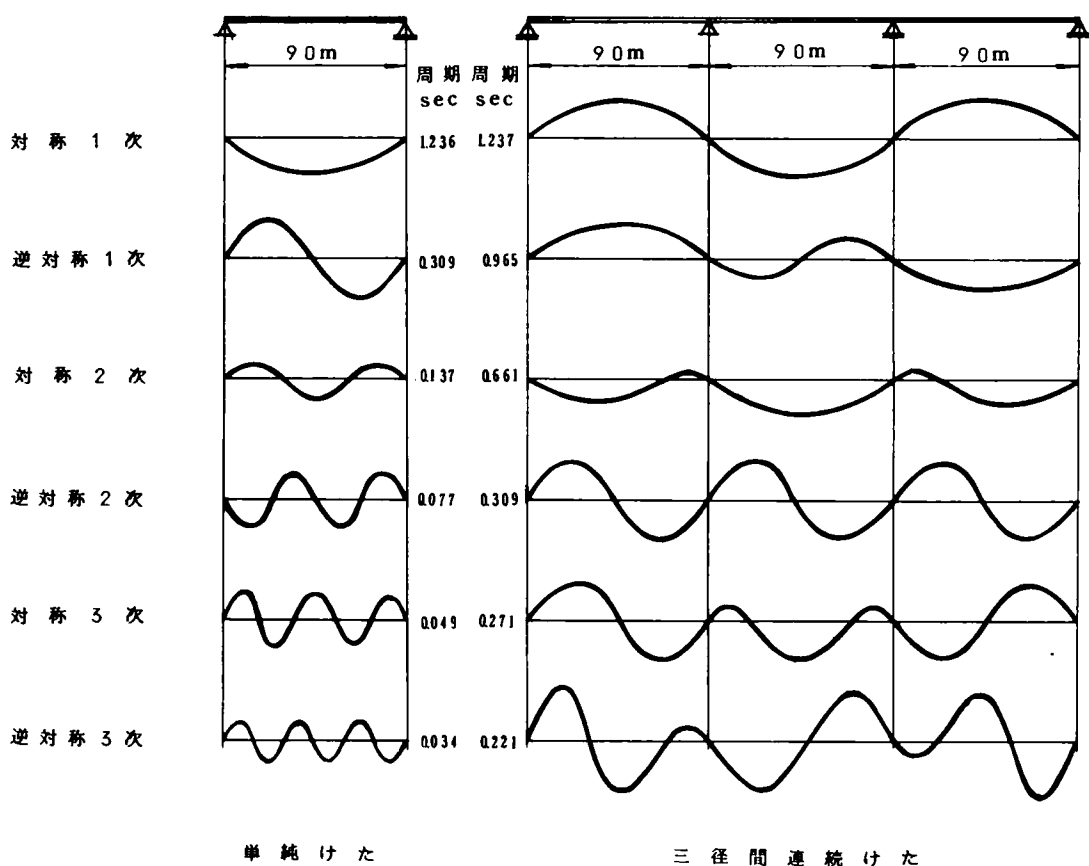


図 4・3 単純けたと三径間連続けたとの固有周期の比較

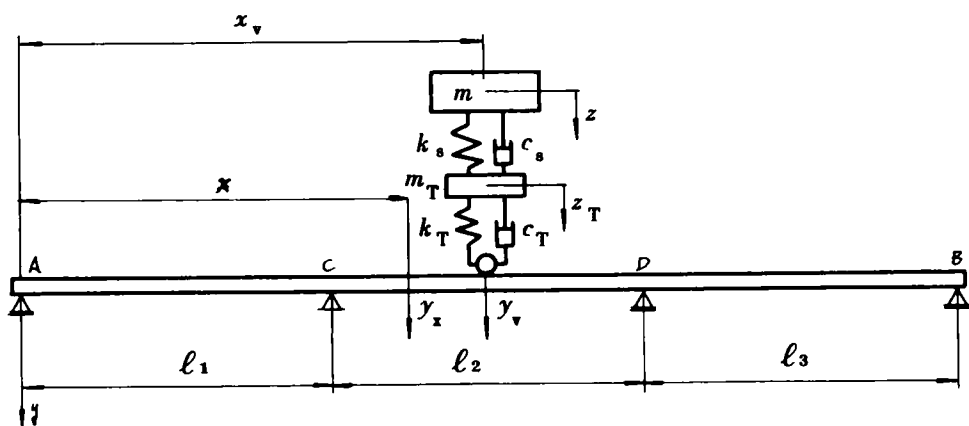


図 4・4 走行自動車荷重と橋けたの振動模型

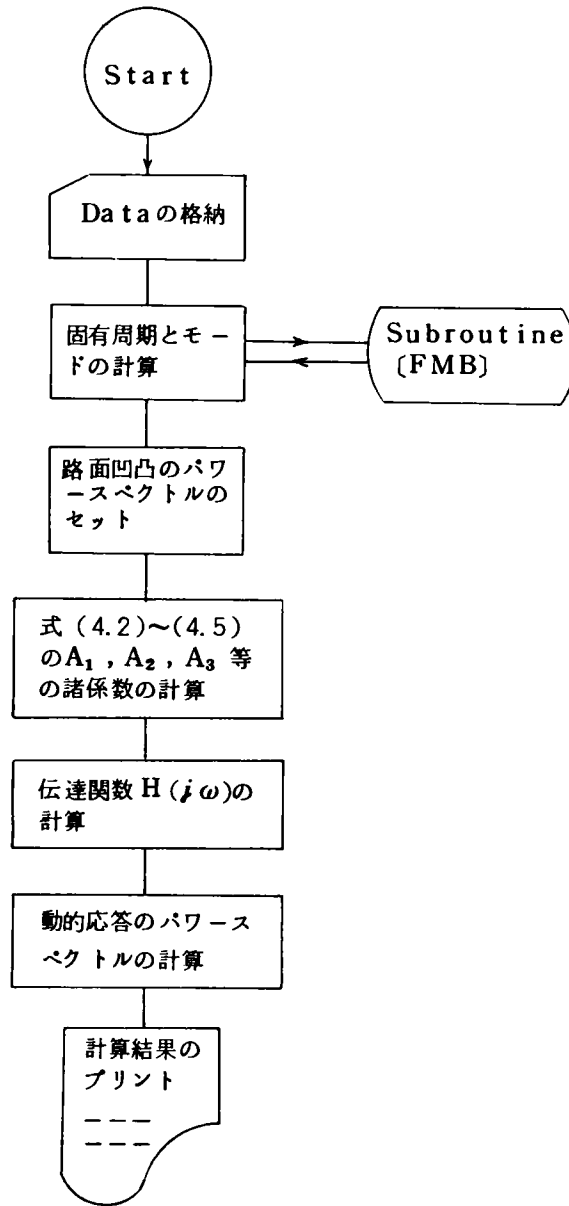
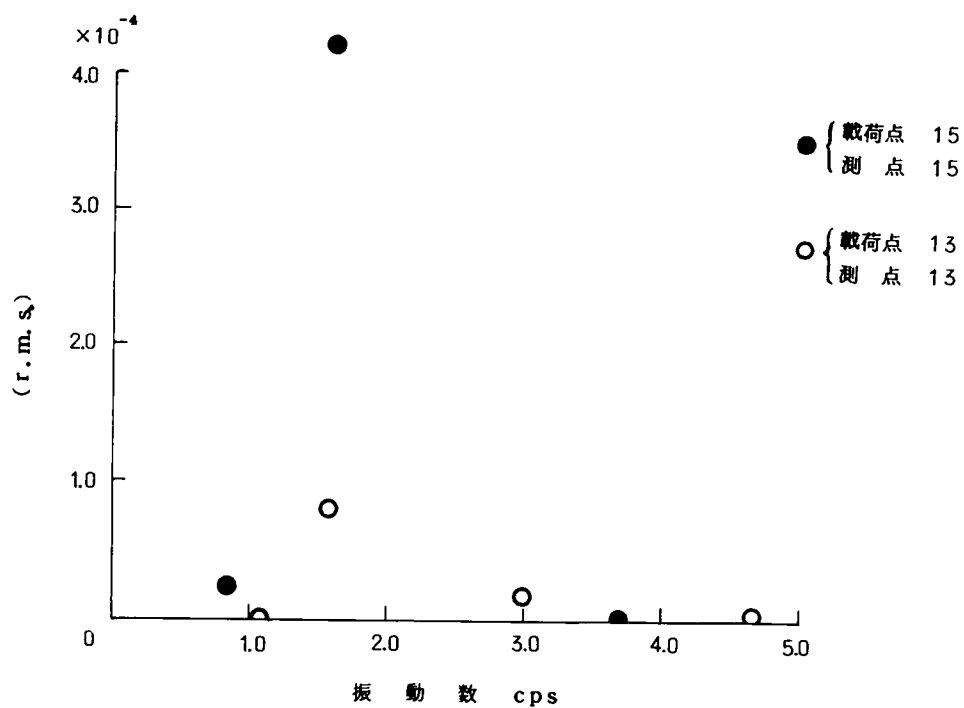
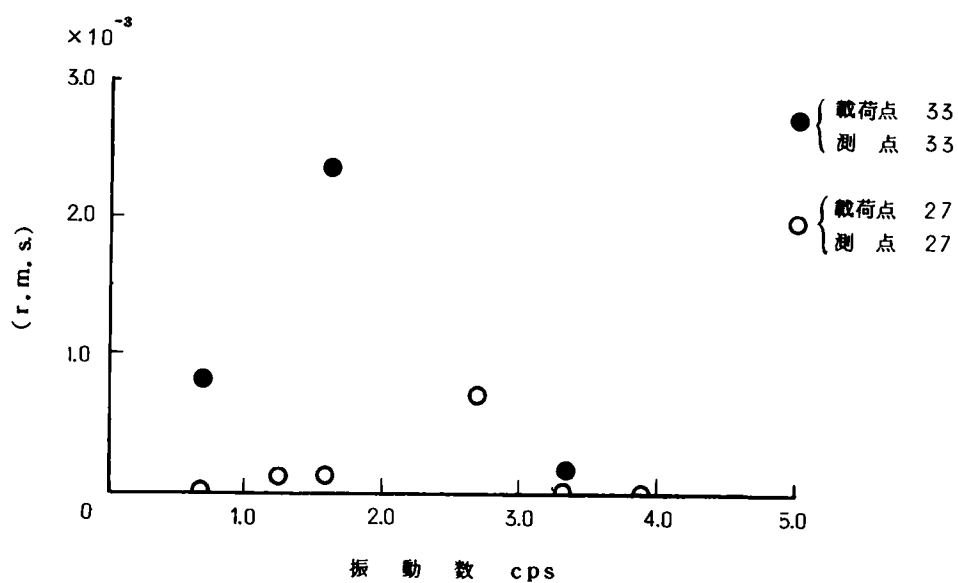


図 4・5 走行荷重による連続けた橋の動的  
応答を求めるフローチャート



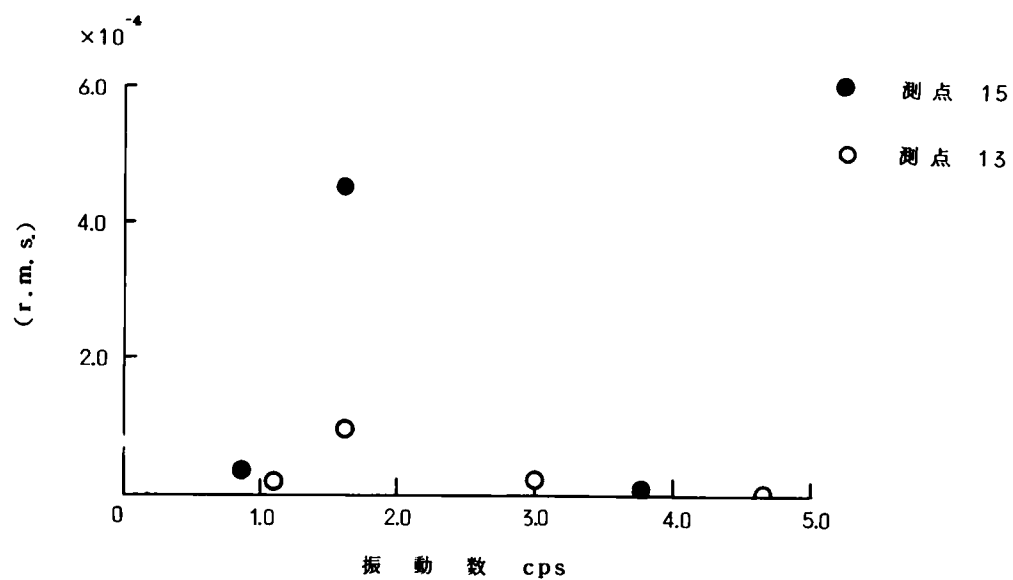
(a) 新十三大橋



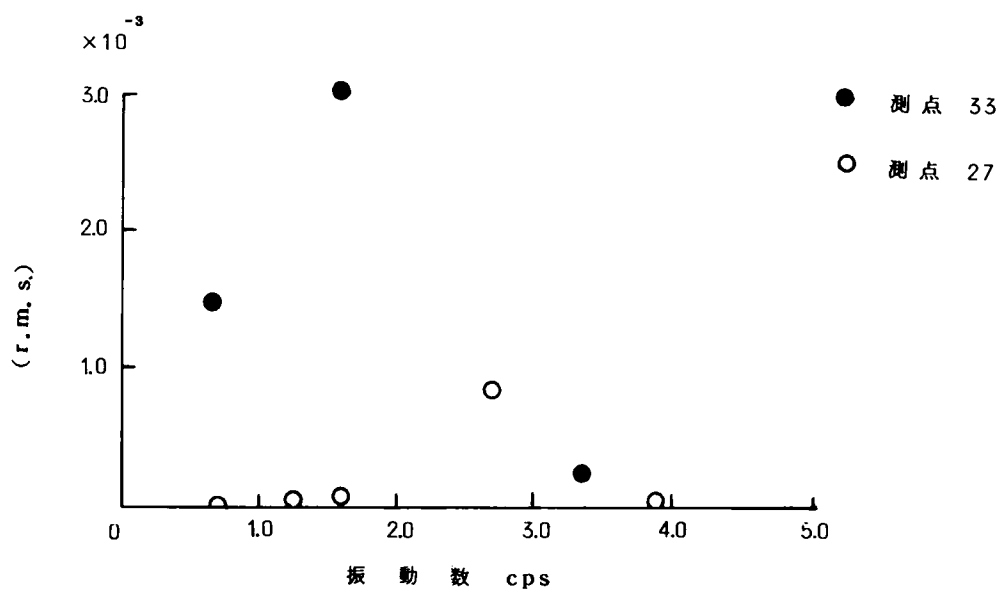
(b) 琵琶湖大橋

図 4・6 1 台の自動車による動的応答 (解析値)





(a) 新 十 三 大 橋



(b) 琵琶湖大橋

図 4・7 設計活荷重に対する動的応答(解析値)

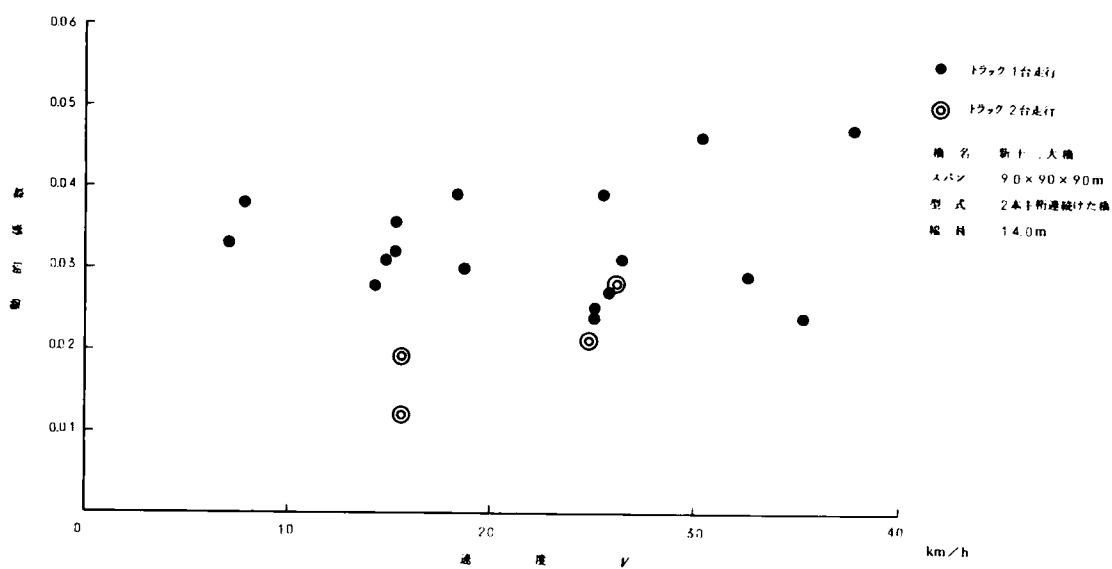
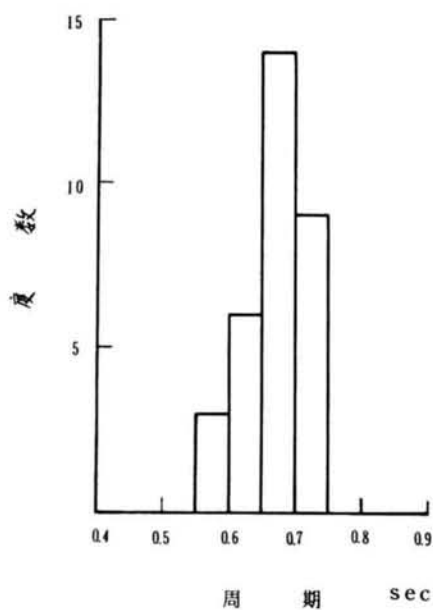
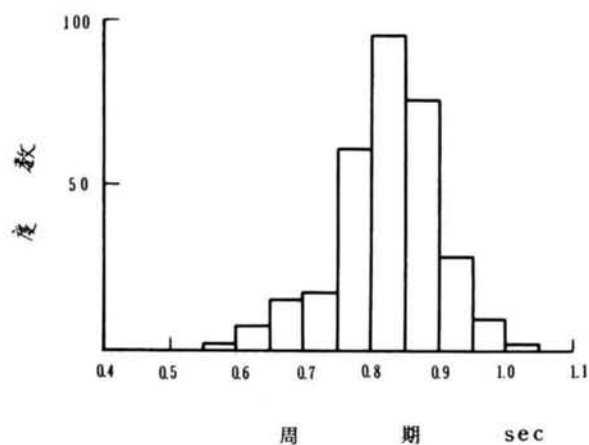


図4・8 新十重大橋の走行速度と動的係数



試験車走行中の全振動  
周期の総合計



試験車走行後の全振動  
周期の総合計

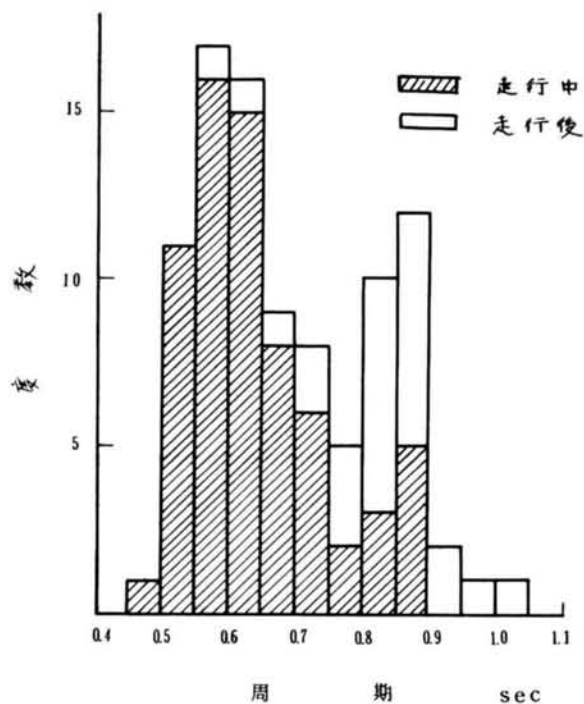


図 4・9 新十三大橋の走行車による桁の振動周期とその度数

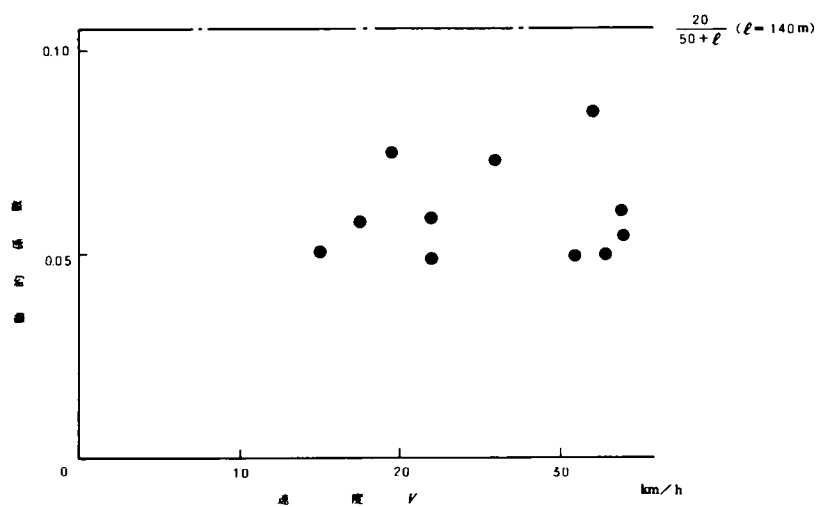
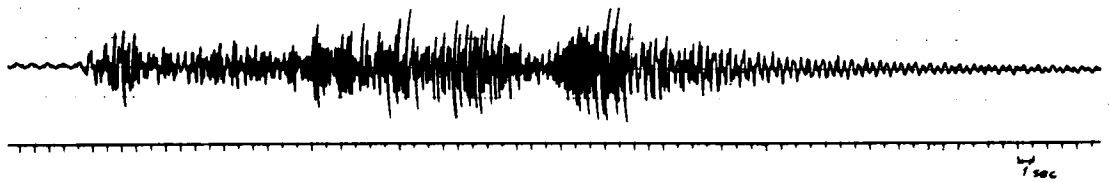
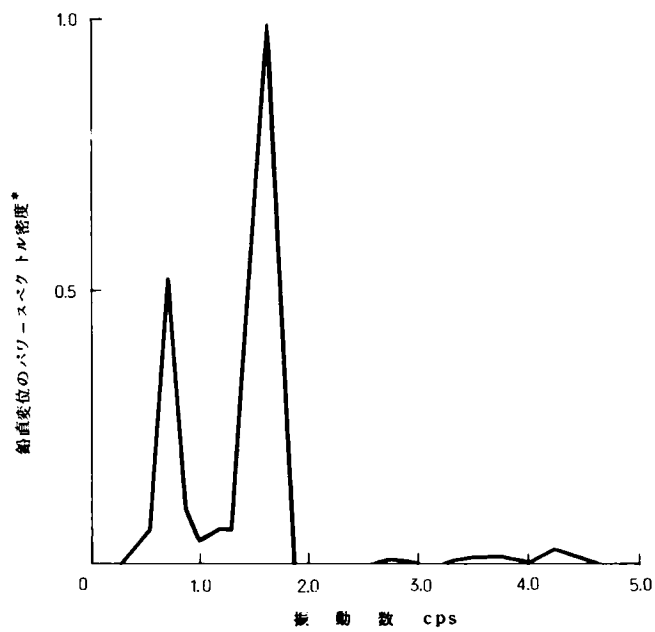


図 4・10 琵琶湖大橋の走行速度と動的係数（試験車 1 台走行）



(a) 中央径間スパン中点の鉛直振動記録



(b) 鉛直変位のパワースペクトル密度

図 4・11 琵琶湖大橋の走行荷重による動的応答の変位パワースペクトル密度

＊ 最大値を 1.0 として表わした

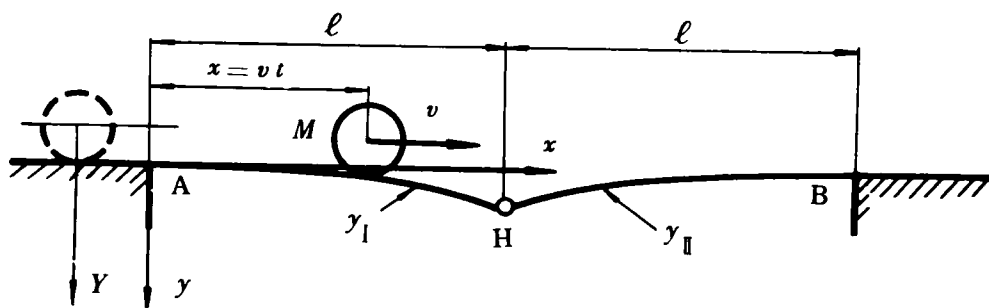


図 4・12 両端固定中央にヒンジを有する桁

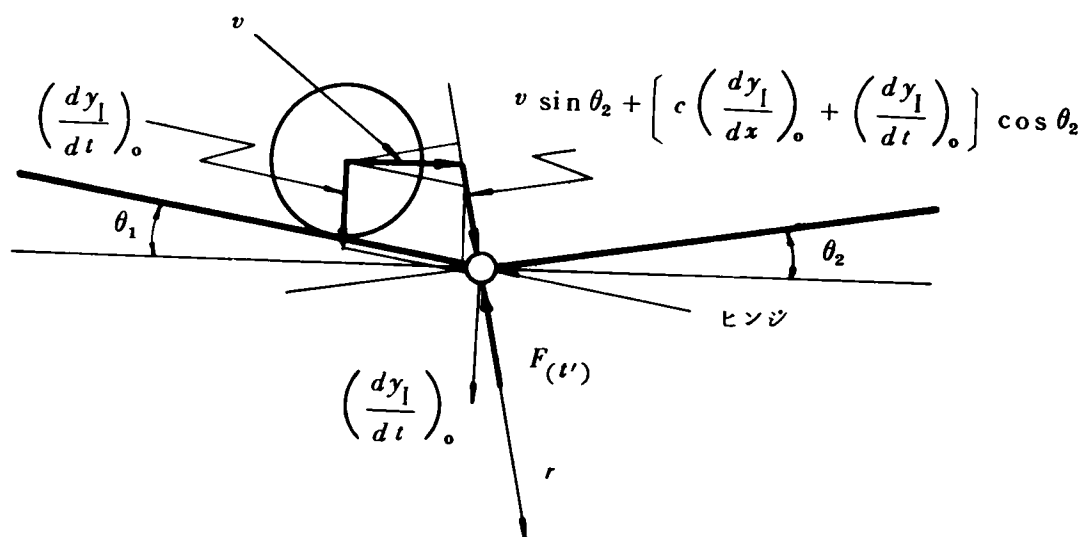


図 4・13 移動荷重がヒンジを通過するときの関係

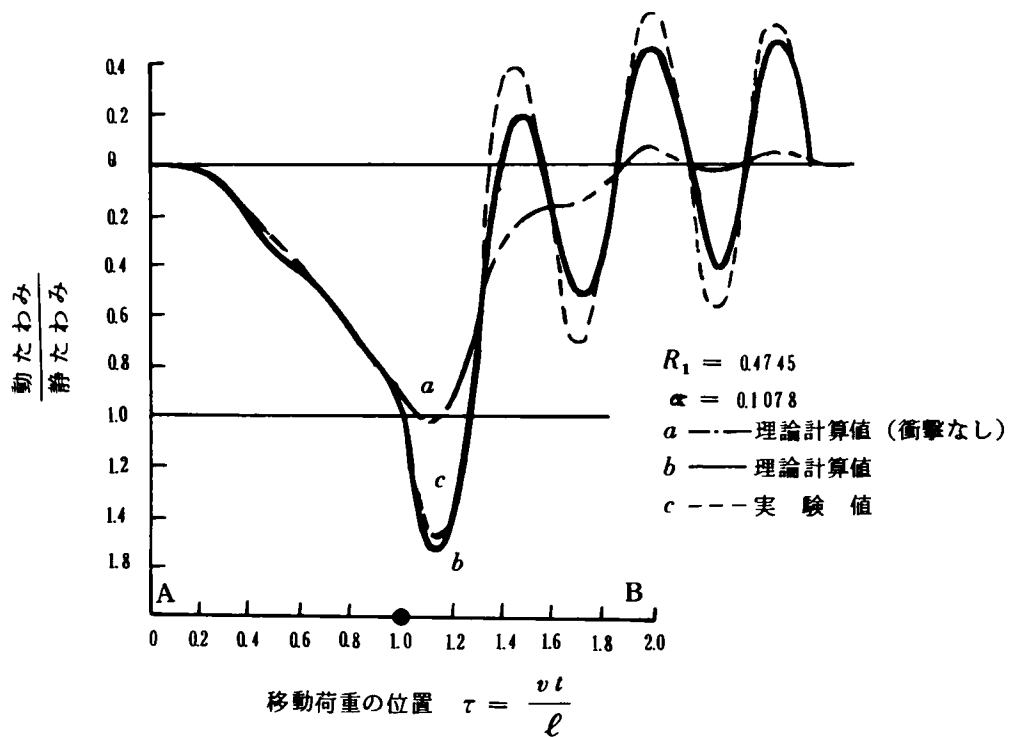


図 4・14 移動荷重によるヒンジ点の時間—たわみ曲線

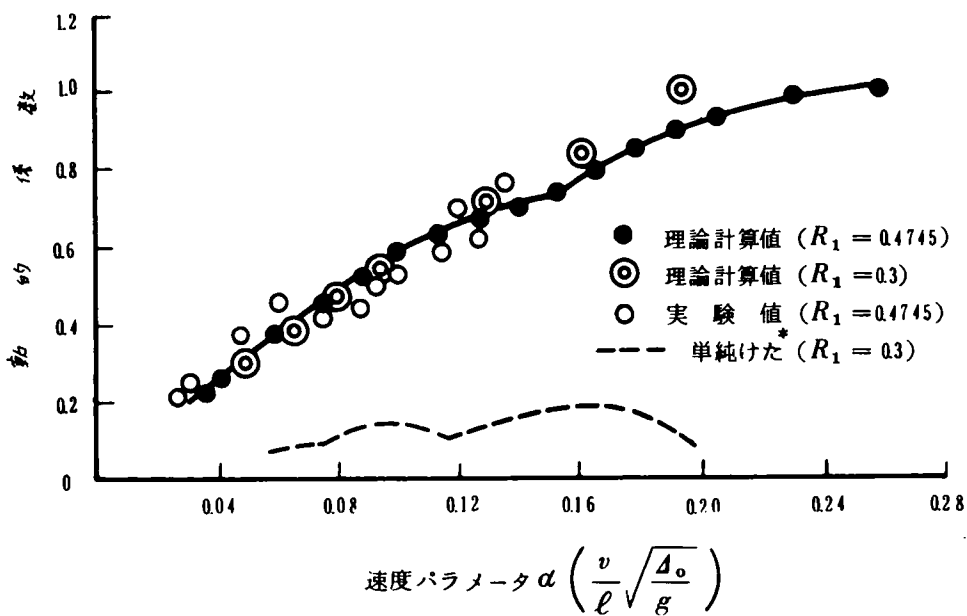


図 4・15 ヒンジ点 (スパン中点) の動的係数

\* Newmark の計算結果<sup>11)</sup>

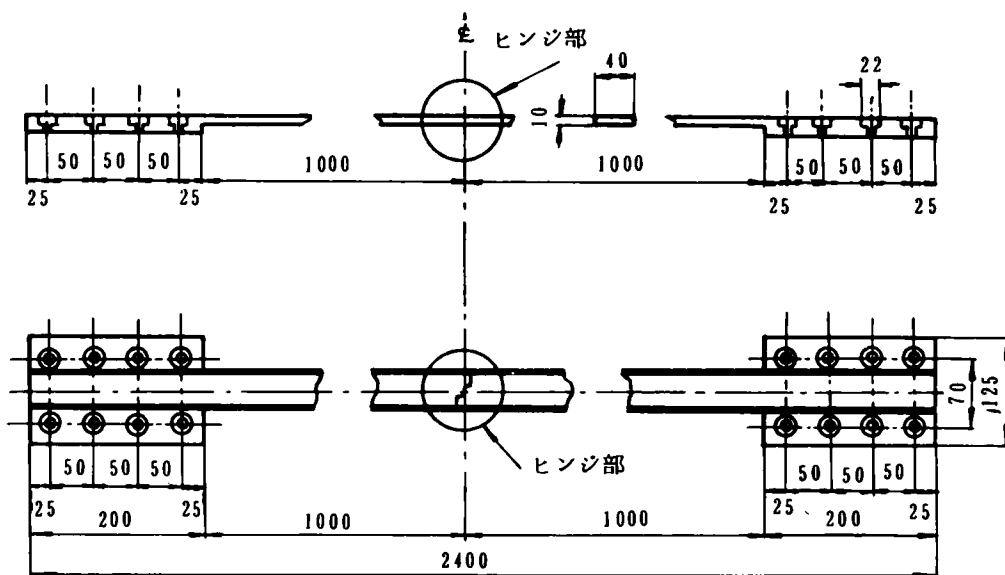


図 4・16 (a) 試 験 け た

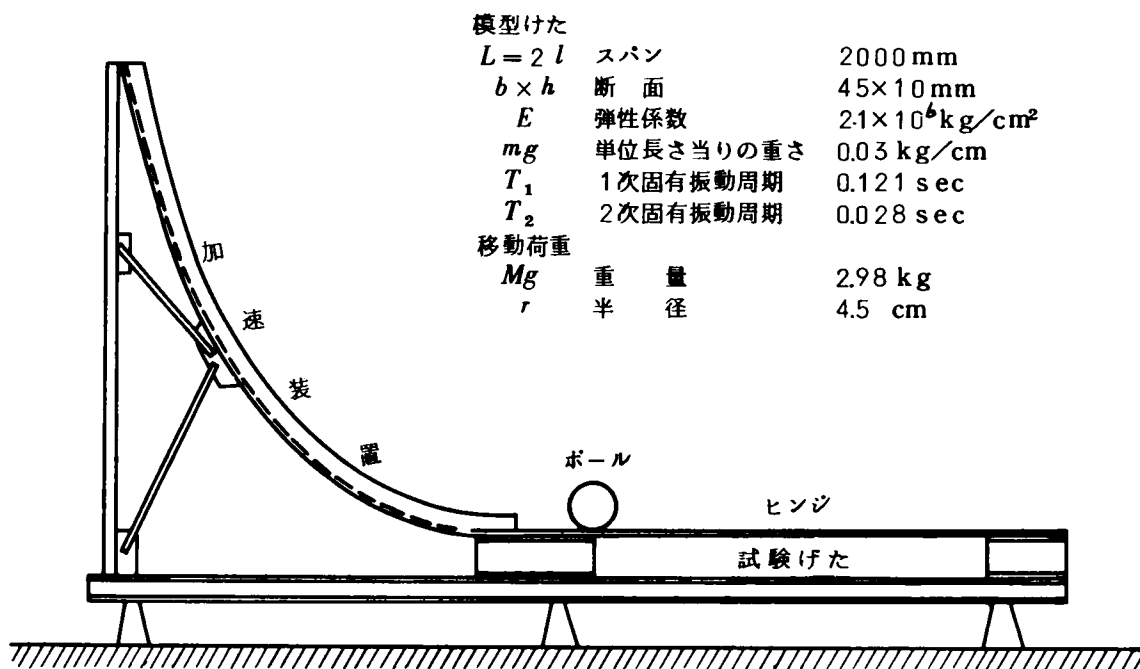


図 4・16 (b) 実 験 装 置



## 第5章 橋りょう設計上の動的問題点 に 対 す る 考 察

### 5.1 概 説

前各章において、走行自動車荷重による道路橋の動的応答について解析して来た。本章において、これらの解析結果を根拠に橋りょう設計上の動的問題について考察する。

さて、活荷重による道路橋の動的影響は走行自動車や橋けたのもつ固有周期、同時に載荷する自動車の台数によって異なることがわかった。また、橋けたの固有周期や同時に載荷する自動車の台数は橋りょうのスパン長と密接な関係があることから、設計活荷重に対する動的係数という形で整理することが合理的であり、わが国をはじめ諸外国の設計示方書もスパン長で整理されていることから本論文でもこの方法をとることにする。

前各章の解析結果をもとに、5.2節、5.3節および5.4節で、これまでの示方書にとられている衝撃係数（本論文では設計動的係数）よりさらに合理的で単純な形の単調減少関数として設計動的係数値を導いた。この値はこれまでの示方書の値よりスパン長が大きくなると急激に小さくなっている。

5.5節では、これらの解析は主として単純けた橋について行なった解析結果を用いているので、連続けた橋や衝撃が大きいとされているゲルバーけた橋について多少の問題が残されていることからこれらの橋形式について第4章の解析結果をもとに若干の考察を加える。

さらに、近年橋りょうの設計および製作架設技術の進歩と構造用材料の高強度化によって、スパン長の大きい橋りょうが架設されるようになって来た。この場合、たわみ制限が問題となって来る。5.6節で、走行荷重による橋りょうの振動という立場から著者の考え方を述べる。

5.7節で、その他、走行速度や expansion joint が橋けたの設計動的係数に及ぼす影響について述べる。

5.8節で、合理的な設計動的係数値の提案を行なう。

## 5.2 スパン長と動的係数の通減率

第2章において不規則振動論を用いて載荷台数が増えると動的係数が小さくなることを立証し、これを単調減少関数<sup>\*</sup>として図2.9に示した。また、第3章の3.4節では1台の自動車による橋げたの動的係数はスパン長が大きくなると小さくなることが図3.8によって示された。さらに、実橋の実験結果(図3.16)からもこのことが立証された。

いま、同種のトラック車が10m間隔で数10台連行している場合<sup>\*\*</sup>を考えると、スパン長20mの橋には2台、30mの橋では3台、. . . ,  $n \times 10\text{m}$ の橋には $n$ 台と同時に載荷する荷重台数 $n$ とスパン長は比例することがわかる。このことから図2.9の横軸をスパン長 $\ell$ におきかえることができる。この場合は、通減率 $\psi_n$ をスパン長との関係で示すことができ、これを図5.1の(b)曲線で示す。同図の(a)曲線は1台走行による動的係数の包絡線(図3.8)から通減率 $\psi_l$ を求めたものである。

一方、 $n$ 台の自動車が同時に載荷した場合の道路橋の動的係数 $D_{cn}$ は第2章の不規則振動論による解析結果、式(2.42)から

$$D_{cn} = \psi_n \cdot D_{c1}$$

として表わされる。ここに、 $\psi_n$ は載荷台数による通減率であり、 $D_{c1}$ は1台走行による動的係数である。この $D_{c1}$ はある基準動的係数 $D_{cs}$ のスパン長による通減率 $\psi_l$ によって表わされること(第3章3.4節、3.6節参照)から総合して、動的係数 $D_c$ は次式のよう

$$D_c = \psi_n \cdot \psi_l \cdot D_{cs} \quad (5.1)$$

式(5.1)から動的係数はスパン長による単調減少関数として表わされ、図5.1の(a)と(b)曲線との積(c)曲線で表わすことができる。

そこで、いま仮りに、

$$\Pi_l = 10/\ell \quad (\ell : \text{m}) \quad (5.2)$$

で表わされる曲線を(d)曲線として図5.1に示す。この(d)曲線とさきに理論通減率として求

\* この関数値を通減率という。

\*\* 図5.2で見られるように短スパン橋の活荷重に対して多少車頭間隔が大きくなっているが、1例として各種スパン長の橋に対して同一荷重列を取ることにした。

めた(c)曲線と比較するとその差は4%前後であり、接近している。このことから動的係数のスパン長による減減率として(d)曲線、すなわち式(5.2)で表わされる曲線を用いてもよいことがわかる。

ゆえに、動的係数  $D_c$  は

$$D_c = \Pi_l \cdot D_{c0} \quad (5.3)$$

として表わされ、 $\Pi_l$  を動的係数の減減率と呼ぶ。

次に、式(5.3)の  $D_{c0}$  は1台の走行荷重による動的係数の減減率  $\psi_l$  を求める際の基準値であるが、走行荷重が1台の場合は載荷台数による減減率  $\psi_n$  が1.0となることから、動的係数を求める際の基準値  $D_{c0}$  と考えてもよい。この場合は式(5.3)の  $\Pi_l$  からスパン長10mに相当する値を基準値に用いればよいことがわかる。しかし、これはあくまでも基準値であって、スパン長10mの道路橋の動的係数というのではないことに注意すべきである。

### 5.3 スパン長と動的係数

5.2節においてスパン長に対する減減率を求めた。この減減率は自動車1台による  $\ell = 10\text{m}$  に相当する橋げたの動的係数を基準にとったことから、ここで、この基準値  $D_{c0}$  を定める必要がある。すなわち

(i) 第3章において、スパン長20mの橋りょうのランダム荷重列による動的係数(図3.12)は0.3であり、式(5.3)から逆算して  $D_{c0}$  を求めると0.6となる。

(ii) 第3章、3.6節で述べた実橋での走行試験結果<sup>(図3.16)</sup>で走行速度を30km/hとすると、スパン長30mで0.6前後であり、20km/h、10km/hと小さくなると一般に小さくなり、また共振曲線(図3.8)から20m～30mが共振スパンであり、10mではさらに小さいことが考えられる。

以上から基準値  $D_{c0}$  を0.6とする。

ゆえに、式(5.3)は

$$D_c = 0.6 \times 10 / \ell \quad (\ell : \text{m}) \quad (5.4)$$

として表わされる。

#### 5.4 設計活荷重に対する動的係数

次に、現行鋼道路橋設計示方書にとられている設計活荷重に対する動的係数を求めてみよう。

まず、自動車荷重列（車頭間隔 $a$ ）と同じ曲げモーメントを生ずる等分布荷重（一等橋）は、川崎<sup>1)</sup>によれば図5.2となる。この図でもし20 ton 車について示方書にとられている $350\text{ kg/m}^2$ を基準に横線を引くと、スパン長30 mで車頭間隔が5 m, 50 mで7 m, 120 mで10 mと比較的に密に載荷した場合に相当する。このことから設計活荷重に対する動的係数として5.3節で求めた式(5.4)の曲線を用いてもよいであろう。

スパン長の比較的に短い10 m前後のけたについては、自動車の固有周期が0.3 sec 前後であることから、図3.8でも見られるように共振に達することはなく動的係数は小さく、また設計活荷重も図5.2に見られるように長いスパン長の橋りょうに対する値より比較的に大きい荷重となっている。このことからスパン長の短い橋りょうの設計動的係数は小さく表わしてもよいことがわかる。

しかし、床板や床組などスパン長の小さいものについて荷重が1台で満載荷重となり、その機会も多く、また床板や床組などは死荷重応力に対する活荷重応力の割合が大きく、許容応力に近い荷重が常時頻繁にくり返し載荷されることから疲労強度が問題となり、活荷重の増減が敏感に疲労強度に影響を及ぼす。このことから設計活荷重に対する動的係数を多少大きく見積る必要がある。

以下に短スパン橋りょうの動的係数に関して若干の考察を加える。

一般に、短スパンの道路橋の固有振動数は自動車の固有振動数に比較して大きく、この場合橋りょう全体をあたかも剛体のように考えてもよいであろう。また、荷重が作用している時間はきわめて短いことから自動車荷重の動的係数を直接橋りょうの活荷重の動的係数として用いても不合理ではなからう。<sup>2)\*</sup>

このことから走行中の自動車の加速度について考察する。

##### (a) 走行試験から

著者はさきに名神高速道路において試験車（日野K300トラック車）による走行試験<sup>3)4)</sup>

---

\* このことは構造物の耐震設計で地震外力として構造物の加速度を直接用いている震度法に相当する考え方といえる。<sup>2)</sup>

を行なったので、その結果を表 5.1 に示す。この表を参考に考察する。この表 5.1 から走行中の自動車の鉛直加速度はばね上で平均  $0.3g$  であり、もっとも大きい値を用いると  $0.63g$  である。しかしこの  $0.63g$  は橋りょうの expansion joint における値であって、床板や床組の動的荷重としては不適当である。そこで平均値  $0.3g$  に標準偏差  $0.1g$  を加えると  $0.4g$  となり、この  $0.4g$  は少なくとも  $84\%$  はこの内に含まれることになる。

表 5.1 名神高速道路における走行試験の結果<sup>3)</sup>  
走行試験車 (20 ton トラック車) の加速度振幅

		平均 $\times g$	標準偏差 $\times g$	絶対最大 $\times g$	平均減衰係数 $kg/cm/sec$
ばね上	前 部	0.282	0.100	0.56	10
	後 部	0.333	0.105	0.625	26
	重 心	0.277	0.090	0.320	18
ばね下	前 部	1.150	0.551	2.60	14
	後 部	1.863	0.719	3.70	28

この加速度は重力加速度  $g$  に対する比で表わされていることから、この  $g$  に対する係数がこの場合の動的係数を示すことになる。

#### (b) スペクトル解析から

第 2 章、2.3 節で橋面の凹凸のパワースペクトル密度から自動車のばね上質量の変位のパワースペクトル密度が求められることを述べた。

さらに、2.3 節では接地力の動的係数  $D_{cv}$  を標準偏差の形で整理して図 2.7(a), (b), (c) に示した。この図 2.7 から走行速度が大きくなると接地力の動的係数も大きくなり、標準設計速度として  $80 km/h^*$  をとり 2.3 節で論じたように標準自動車の動的係数の平均値  $0.334$  に多少の余裕を見込んで  $0.4$  が適当と思われる。(詳細は 2.3 節参照)

以上から設計活荷重に対する動的係数として基準値を  $0.6$ 、最大値として  $0.4$  を採用するのが合理的であると考えられる。

\* 高速を標準設計速度としたのは 1 台走行の場合であるからである。

ちなみに、各国の示方書で定められている衝撃係数の最大値を表 5.2 に示す。表 5.2 から 0.4 が妥当な値であることがわかる。

表 5.2 各国の示方書で定められている衝撃係数の最大値

	日 本	イギリス B. S.	アメリカ AASHO	ド イ ツ DIN( 1073 )
$i$	0.4	0.25	0.3	0.9

以上から設計活荷重に対する動的係数として次の式が導かれる。

$$\left. \begin{array}{ll} D_c = 0.4 & 0 < \ell \leq 15 \text{ m} \\ D_c = 0.6 \times 10 / \ell & 15 \text{ m} < \ell \leq 150 \text{ m} \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

#### 5.5 連続けた橋とゲルバーけた橋の動的係数

以上は単純けた橋に対する考察から比較的長いスパン長のけた橋の動的問題にまで理論を拡張して来たが、実際にはスパン長が長くなると連続けた形式やゲルバーけた形式の方が力学的に有利となる。また近年構造用鋼材の高強度化や設計・架設技術の進歩によって城ヶ島大橋<sup>5)</sup>・琵琶湖大橋や新十三大橋など長大スパンの連続けた橋が架設されて来た。

このような橋の走行荷重による動的問題について考察を加える必要があることから本論文の第 4 章ではこれらの形式の橋りょうの動的問題を論じた。その結果このような橋の走行荷重による動的応答はその橋の振動周期やモードが求められるならば、不規則振動論を応用して比較的簡単にその特性を把握することが可能であることが立証された。さらに、連続けた橋の固有周期は対称 1 次、逆対称 1 次、対称 2 次の周期が比較的接近していることからこの種の解析では逆対称 1 次および対称 2 次振動を無視することはできない。ちなみに、前記 3 橋の基本固有周期は 1.2 ～ 1.5 sec と長く走行自動車の固有周期 0.3 ～ 0.4 sec とは離れていることから、むしろ対称 2 次または逆対称 2 次の振動周期と共振しやすい。第 4 章 4.3 節では、比較的スパン長の大きい三径間連続けた橋では橋けたや自動車の振動特性にもよるが、基本振動とともに、対称 2 次振動が多く現われることを理論的に実験的に立証できた。

この対称2次のモードはいずれのスパンでもそのたわみ曲線の形は  $\sin$  曲線に近く、設計活荷重の配置を考慮して、第2章における単純けた橋と同様の解析を行なった結果、載荷台数によって動的係数を小さくすることができるという結果を得た。その解析の結果から求めた新十三大橋と琵琶湖大橋の設計動的係数は表4.2の値となり、単純けた橋の解析結果から求めた式(5.5)の動的係数よりやや小さい値を示している。このことから連続けた橋のような長大スパンの橋りょうの設計動的係数として式(5.5)を適応してよいことがわかる。

次に、スパンの途中にヒンジを有するけた橋はヒンジ部の構造によって、大きな衝撃作用の影響を受けることがあることを第4章、4.4節で論じた。このような場合にはヒンジ部を上げ越したり、ヒンジ構造の間隔を小さくするなどして衝撃作用を小さくするよう、設計に当っては十分配慮しなければならない。このことから高速道路のような場合には不利な橋形式であるといえる。

たとえば、ディヴィダーク工法による形式で、三径間連続けたで、両側径間が比較的剛で、中央径間のスパン中点にヒンジを有するけた橋について考察するとその形は中間支点でのたわみ角を無視すると、両端固定スパン中点にヒンジを有する形式となり、ヒンジ部に集中荷重が作用した場合のたわみ量は同一スパン長を有する単純けたのそれと等しくなる。一方、現行設計示方書にしたがって動的係数を計算すると、いずれの形式の場合も等しい値を用いることになる。しかし、第4章、4.4節でも論じたようにヒンジ部における衝撃作用が大きいことから式(5.5)の算出式を用いることは好ましくない。この種の形式橋の設計動的係数についてはなお一層の研究がなされなければならないので、式(5.5)の適用範囲から除外して、考えた方がよいように思われる。

## 5.6 たわみと橋けたの振動

近年構造用鋼材の進歩や設計技術の高度化によって、鋼床板形式を用いたり、高張力鋼材を用いたりして橋りょう設計の合理化が行なわれ、スパン長の大きい橋りょうが架設されるようになった。この場合スパン長に対する現行設計示方書のたわみ制限の規定を満足することが本質的にむずかしい。ここでは走行荷重による橋けたの振動の立場から この

問題について若干の考察を加える。

もともとたわみ規定は、(1) たわみが大きくなると設計時に考慮しなかった床板や床組部等への2次応力の影響が大きくなるのでそれを防ぐことや、(2) 走行自動車の走行安定の問題、(3) 2軸車以上の多軸車の中間車輪の浮上りを防ぐため、など2次的問題を解決するための便法として設けられたものであるが、一方(4) 現行弾性設計法はけた全体としての剛性について検討が行なわれず、また、(5) 動的問題に対する検討も行なわれていないため、および(6) 歩行者の心理的問題から設けられたものである。<sup>6)~9)</sup>

以下に、この問題に対する著者の見解を述べる。

(1)、(2)および(3)の問題は、たわみの問題というよりむしろ橋けたの曲率の問題である。

いま、たわみ曲線が $y=f(x)$ と表わされるものとし、曲線の半径を $\rho$ とすれば、各任意点 $x$ の曲率は、

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2 y / dx^2}{\{1 + (dy/dx)^2\}^{3/2}} \quad (5.6)$$

となる。若し、 $(dy/dx)^2$ が1に比べて小さいとすれば、曲率は $d^2 y / dx^2$ 、すなわち、たわみ角の変化量から定まることになる。いま、たわみ曲線を

$$y = \delta_c \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

とすれば、式(5.6)から曲率は、

$$\frac{1}{\rho} = \delta_c \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (5.7)$$

と表わされる。ここに、 $\delta_c$ はスパン中点のたわみである。このことから曲率で規定するとすれば $\delta_c / \ell^2$ の形で制限する方が合理的であると思われる。

しからば、この曲率 $1/\rho$ をどの程度に定めるかについては種々の立場から研究し、検討されなければならないが、いま、スパン長80mの橋りょうの現行設計示方書の値を基準に考えるとすれば、式(5.7)の最大値として

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\delta}{\ell} \cdot \frac{\pi^2}{\ell} = \frac{1}{500} \times \frac{(3.14)^2}{8000} = \frac{1}{4.0 \times 10^6} (3.14)^2$$

が導かれる。

この値から



$$\frac{\delta_{ca}}{\ell^2} = \frac{1}{4.0 \times 10^6} \quad (\delta_{ca}, \ell: \text{cm}) \quad (5.8)$$

を得る。

式(5.8)を横軸にスパン長を、縦軸にスパン中点の最大許容たわみ量  $\delta_{ca}$  をとってプロットすると図5.3のようになる。

この図5.3の実線は式(5.8)の曲線であり、破線は現行設計示方書の値である。

このことから、曲率から考えられる許容最大たわみはスパン80m<sup>\*</sup>までは現行設計示方書で定められている値を、80m以上の場合は式(5.8)で与えられる値をとった方が合理的であると思う。

次に、(4)、(5)および(6)の振動の問題について述べると、第4章で述べたようにスパン長の大きい橋げたの走行荷重による振動はさほど大きくはない。このことからたわみが大きいという理由のみから動的に不安定であるとは限らない。むしろ自動車と橋げたの固有周期によるものと思われる。

このことから第4章で論じたように橋面の凹凸のパワースペクトル密度からスペクトル解析の手法を用いて、橋げたの振動問題について検討されているならば、動的安定問題からはたわみ制限の問題にこだわる必要はない。

ちなみに、諸外国の示方書でとられている値を表5.3にあげる。また、近年西欧諸国ではこの規定を撤廃しようという空気があるようである。<sup>\*\*</sup>

表5.3 各国の示方書で定められているたわみ制限 (けた橋のみ)

日 本 (道路橋)	日 本 (鉄道橋)	アメリカ AASHO	アメリカ AISC	ド イ ツ DIN(1073)
1/500	1/1000	1/800	1/360	1/400
(活荷重)	(活荷重)	(活荷重+ 衝撃荷重)	(活荷重)	(活荷重)

しかし、スパン長の短い橋りょうについては現在の設計法ではこのことは問題とはならないが、高張力鋼が安価になってより多く利用されるようになると、曲率の問題からも振

\* ここでは80m基準にとったがこれについてはさらに研究を要する。

\*\* ドイツ鉄道橋では廃止された。

動問題からも現行設計示方書にとられている値より、さらにきびしい制限がなされなければならなくなることも考えられ、その場合は式(5.8)に相当する値が全面的に取り入れられるものと思われる。

## 5.7 その他の問題

### (a) 走行速度が設計動的係数に及ぼす影響

このことについては第1章、1.2節で述べたように、設計動的係数は設計活荷重に対する値であり、設計活荷重は自動車と比較的密に列をなして走行した場合の値であることから、自動車の走行速度もあまり高速とはなり得ない。このことから本研究では40 km/hを基準とし計算されており、走行速度が設計動的係数に及ぼす影響は小さいものと考えられる。

### (b) Expansion joint が設計動的係数に及ぼす影響(3.4節参照)

橋りょうに入る際、自動車はexpansion joint によって大きな衝撃を受ける。この衝撃をもって橋けた上に入るのであるが、この衝撃は自動車の懸架部やタイヤ部の減衰性によって急激に減衰し、スパン長30 m以上の橋りょうではほとんど影響がない。<sup>2)</sup>このことから本論文では短スパンけたについてのみ考慮することになっている。しかし、5 m以下の場合には床板や床組の設計に用いられる値でexpansion joint 付近では影響が大きい、これより離れたところでは影響は少ない。

## 5.8 設計動的係数の提案

以上走行自動車荷重に対する橋けたの動的応答に関する種々の理論的・実験的解析の結果から道路橋の設計活荷重の動的影響は動的係数の形で取り扱うことが合理的であり、さらにその動的係数はスパン長による単調減少関数として表わされることがわかった。

このことは現行設計示方書にとられている衝撃係数法が合理的であることを立証している。さらに、動的解析の結果、新たに次式のような合理的で、しかも単純な設計動的係数を求めることができた。

$$\left. \begin{array}{ll} i = 0.4 & 0 < \ell \leq 15 \text{ m} \\ i = 0.6 \times 10 / \ell & 15 \text{ m} < \ell \leq 150 \text{ m} \end{array} \right\} \quad (5.9)$$

比較のために，わが国をはじめ各国の設計示方書にとられている値を図5.4に示す。さらに第3章のシミュレーションによって求めた曲線をも併記した。

本論文の結果として導いた設計動的係数と上記の各曲線の値と比較して次のことがいえる。

(1) シミュレーションで求めた曲線とよく接近している。このことは実際の橋りょうでの値に近いことを意味している。

(2) ドイツのDIN(1073)でとられている値とよく接近している。

(3) わが国およびアメリカ(AASHO)でとられている値は長スパンでやや大きいようである。

(4) 英国の示方書は，走行荷重による動的影響が比較的敏感に橋けたの動的応答に作用するスパン長30mまでを0.25として，それ以上は0としており，本研究で求めた曲線をさらに単純化したものとみなされる。

(5) ゲルバー橋などヒンジを有するけた橋については，さらに理論的・実験的研究が行なわれなければならないので，この設計動的係数によらない方がよいようである。

## 参 考 文 献

- 1) 川合平夫・森崎健二：自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性，三菱重工技報，Vol. 2，No. 2，20/27，(昭40)。
- 2) Kobori, T.: Study on Impact of Short Span Highway Bridge, Proc. of the Fifteenth Japan National Congress for Applied Mechanics, 294/299, 1965.
- 3) 山田善一・小堀為雄：自動車走行中の振動特性が橋梁の衝撃係数に与える影響について，土木学会第20回年次学術講演会，1-29，昭40。
- 4) 喜内敏・小堀為雄・大辻秀明：確率論から見た道路橋の衝撃係数，金沢大学工学部紀要，Vol. 4，No. 5，25/33，(昭42)。
- 5) 城ヶ島大橋応力測定委員会：城ヶ島大橋応力測定報告書，40/44，技報堂，(昭36)。

- 6) Committee on Deflection Limitations of B.S.D.:  
Deflection Limitations of Bridges, Proc. of  
the ASCE, SD, 1633-1/20, 1958.
- 7) 日本道路協会：鋼道路橋設計示方書・同解説, p. 67, 昭39.
- 8) 土木学会：土木工学ハンドブック, 894/895, 技報堂, 昭39.
- 9) Bresler, B. and Lin, T. Y. : Design of Steel Structures,  
444/447, John Wiley & Sons, or Topan, 1960.

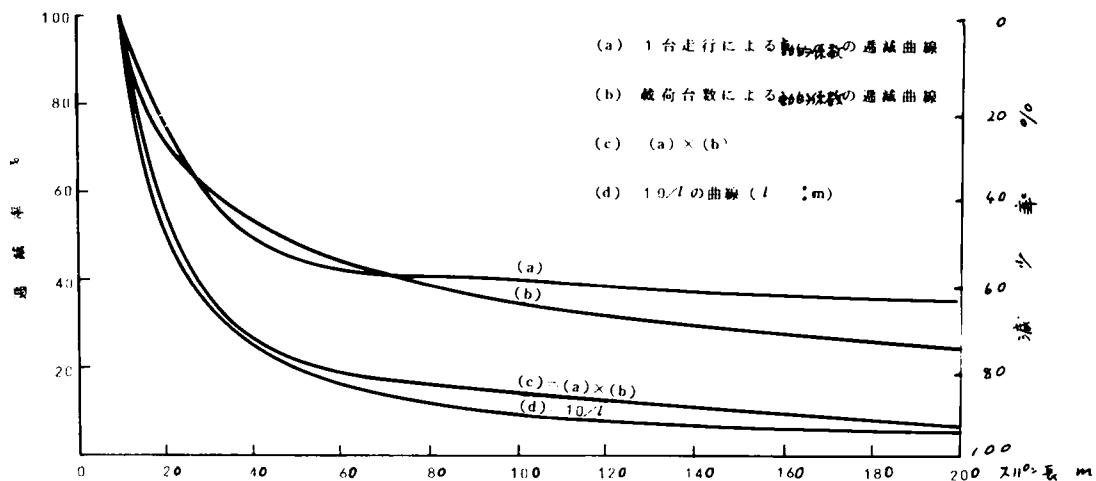


図5-1 スパン長および載荷台数による過減率

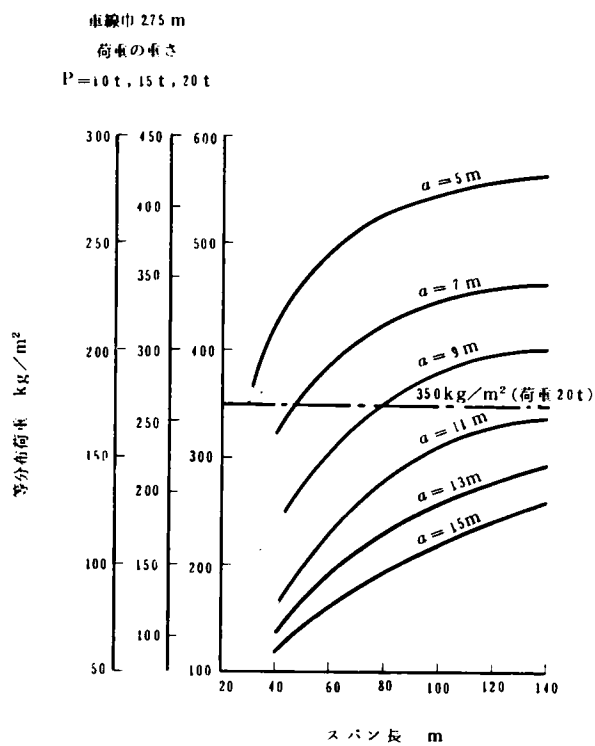


図5-2 自動車荷重列（車頭間隔  $a$ ）と  
 同じ曲げモーメントを生ずる等  
 分布荷重（一等橋）

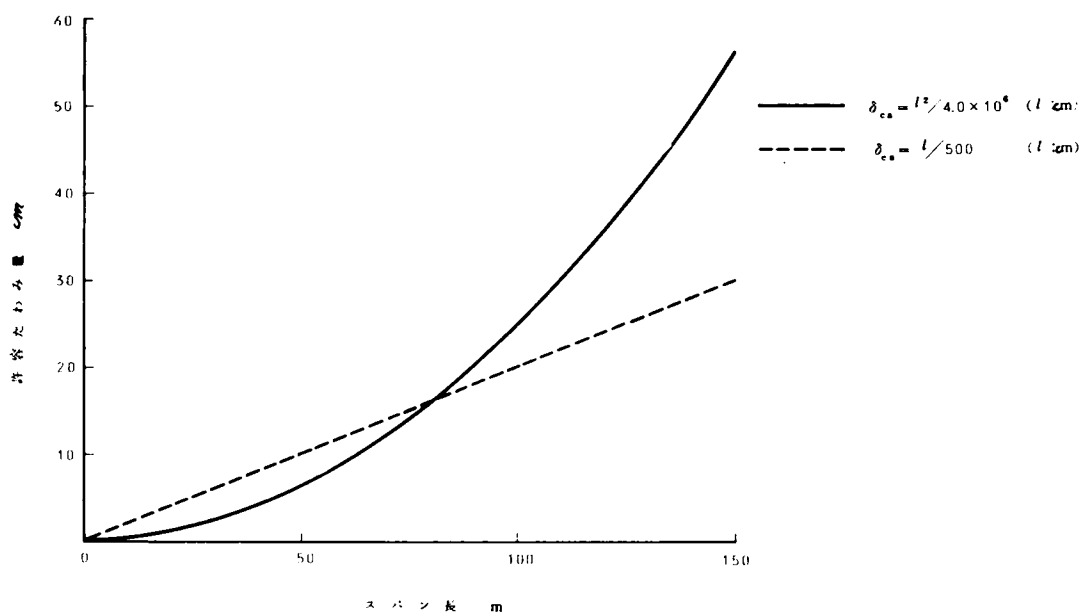


図 5-3 スパン長と許容最大たわみ

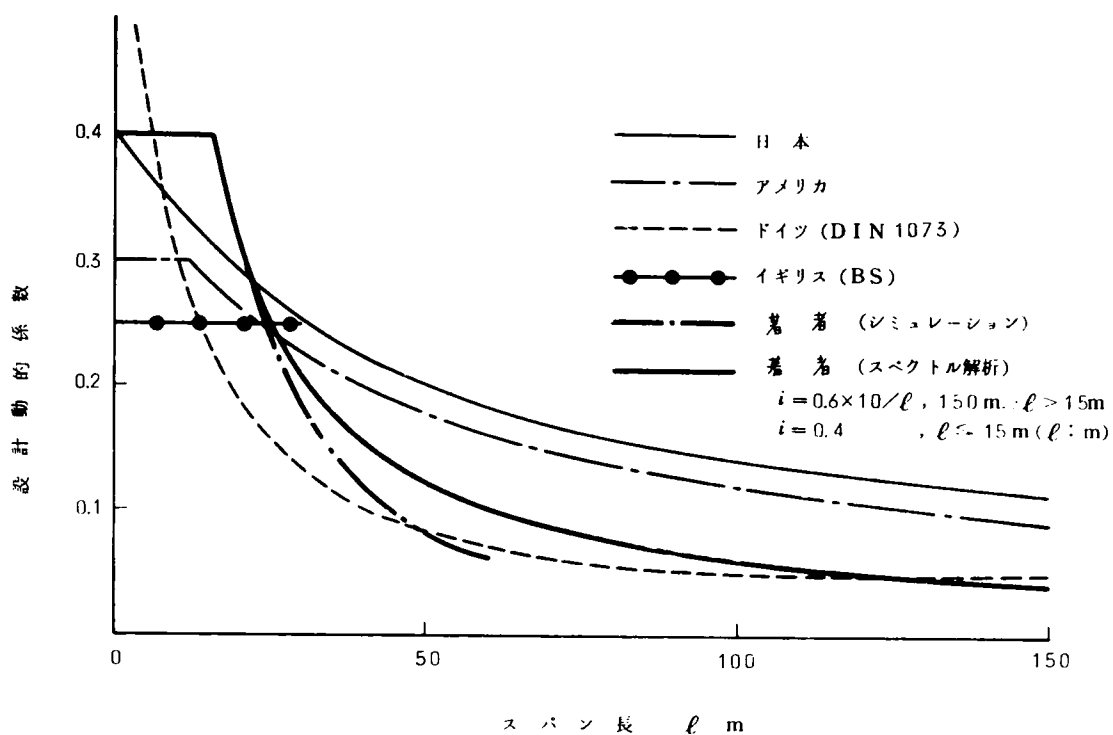


図 5-4 スパン長と設計動的係数

## 第6章 結 論

図6.1に示すような研究過程を経て、走行自動車による道路橋の動的応答について種々の立場から解析を加えた。

その結果、合理的でしかも単純な形の設計動的係数を提案することができた。この動的係数を用いることによって、動的荷重に対する道路橋設計の合理化が行なわれ、たとえば、スパン長50mの道路橋で約8%設計荷重を小さくすることができ、長大スパン橋においてはさらにその値を小さくすることが可能である、この点から長大橋の経済性を高めることができるものと思われる。

ここに、あらためて、本論文の各章の概要と得られた結果を要約する。

第1章において、走行荷重による橋けたの振動に関する従来の研究について述べ、それらの研究は主として鉄道橋に関する研究から出発しており、道路橋に関する研究は近年になってからのようである。その代表的なものはMITのBiggsやイリノイ大学のNewmarkらの研究であり、それは主として1台の走行荷重による橋けたの振動を取り扱っている。しかし、実際の設計活荷重は走行荷重が比較的密に載荷している場合であって、これらの研究とは荷重の取り方が異なる。このことから1台の走行荷重に対する研究の結果を直接橋りょう設計に結びつけることは困難であることを指摘した。

このことから本論文では、道路橋の活荷重は比較的荷重が密に載荷した場合の荷重列に相当することに注目して、これらの荷重による動的応答は同時に載荷する荷重の数が多くなると、それぞれの荷重の振動の位相差やそれぞれの荷重が互にダイナミックダンパーとして働くことなどによって一般に小さくなることが、これまでの多くの実験によって確かめられているのでこの点についての理論的解析を行なった。その結果、活荷重に対する道路橋の動的性状を明らかにし、従来実験や1台の走行荷重による橋けたの振動解析などから経験的に決められていた衝撃係数（本論文では設計動的係数という）についてあらためて理論的解析を行なって、合理的な設計動的係数を導くことを主目的としている。

第2章では数台の自動車が同時に載荷した場合の橋けたの振動は載荷台数が多くなると小さくなるということを不規則振動論の立場から論じた。

この場合、自動車の振動は主として橋面の凹凸による振動であり、この橋面の凹凸が不規則であることから自動車の振動もまた不規則である。このような不規則な振動による橋けたの振動もまた不規則な振動となる。この不規則な振動を解析する手法の1つとして構造物の耐震解析等に近年よく用いられる不規則振動論をこの研究に応用したのがこの章である。

荷重としてはあくまでも設計活荷重に近い自動車列を対象に考え、これらの自動車の振動は互に独立に起るが、そのパワースペクトル密度は大差がなく等しいとして、多くの振動荷重が同時に載荷した場合の道路橋の動的応答をスペクトル解析から求め、同時に載荷する台数が多くなると動的係数は小さくなることを立証し、その遞減率を求めた。

第3章では、実際の交通流の調査から一般に自動車はある列をなして走行し、その自動車列中の車頭間隔や重量の分布などはある確率変数であることを確認し、この確率変数の代表値（たとえば、平均値、標準偏差等）を求め、これらの値を用いて電子計算機の中で、自動車荷重列模型（ランダム自動車荷重列という）をモンテカルロ法で作成し、これらのランダム荷重列が種々のスパン長の道路橋上を走行する時の橋けたの動的応答を数値計算（Newmark の $\beta$ 法）によって求め、これらの結果を同時に載荷する荷重の数やスパン長で整理して第2章の結果と比較した。いわゆるシミュレーション法によって、電子計算機の中で、実際の交通流に対する各種スパン長の道路橋の動的応答について数学的実験を行なった。

さらに著者がこれまでに関係した数橋の実験について述べその結果と比較した。

これらの結果より、動的係数は同時に載荷する荷重の数が多くなると小さくなり、ひいてはスパン長が大きくなると小さくなることを立証した。

一方、スパン長が大きくなると橋けたの質量が自動車荷重のもつそれよりはるかに大きくなることや、橋けたの固有周期と自動車荷重の固有周期との差が大ききことなどから橋けたは振動しにくくなる。この点から1台の荷重による動的係数もスパン長が大きくなると逆に小さくなることを解析的に実験的に確かめた。さらに、この章では走行荷重が道路橋の振動に与える各種要因、たとえば expansion joint における衝撃の影響、走行速度による影響等について考察を加えた。

第4章は、スパン長の大きい連続形式橋の設計活荷重に対する動的応答について解析したもので、ここでは近年架設された新十三大橋と琵琶湖大橋を対象に解析し、その結果を実験値と比較した。



この種の解析では橋けたのもつ固有周期とその固有関数（モード）が求められているならば、モード解析とスペクトル解析を用いて橋面の凹凸のパワースペクトル密度から動的応答の性状を比較的簡単に求めることができることを述べた。

また、多スパンで変断面であるような橋けたの固有周期とその固有関数（モード）を求めることは、従来非常にめんどろな計算を必要としたが、本論文で transfer matrix 法を用いて作成したサブプログラム〔FMB〕によって短時間に容易に求めることができる。

さらに、連続形式橋の一種としてよく用いられるスパンの途中にヒンジを有するけた橋の動的応答について解析した結果を述べたが、この種のけた橋では走行荷重がヒンジ点を通過する時に大きな衝撃を橋けたに与えることからこの種の橋りょうは橋面がスムーズな単純けた橋や連続けた橋より設計動的係数を大きくとる必要があることを述べた。

第5章では、以上各章の解析結果をもとに、(1) 載荷台数と動的係数の通減率、(2) スパン長と動的係数の通減率を求め、これらの2つの通減率や本論文中的の種々の解析的実験的研究の結果から (3) スパン長に対する設計動的係数を求めた。

一方、(4) スパン長の大きい連続けた橋の設計活荷重に対する動的応答の特性と設計動的係数を求めた。また(5) 連続けた橋など構造用鋼材の高張力化や設計技術の合理化により、応力的には十分であるがたわみ制限の規定を満足しないような場合について、動的安定の立場から著者の考え方を述べた。すなわち、動的安定<sup>に該当</sup>検査が橋りょうの設計時に行なわれているならば、たわみ制限の規定にはあまりこだわらなくてよいことを述べた。(6) 以上の解析の結果から設計動的係数の提案を行なった。

以上が本論文の各章で論じた概要とその結果のおもなものであるが、さらにこれらを総括すると次のようになる。

(1) 走行荷重による道路橋の動的応答の特性は、橋けたの固有周期とその固有関数（モード）が求まれば橋面の凹凸のパワースペクトル密度から不規則振動論を用いて比較的簡単に求めることができる。

(2) 同時に多くの荷重が載荷するときの橋けたの動的応答は載荷台数によって小さくなることが不規則振動論からも、シミュレーションの方法からも立証することができた。

(3) 走行荷重による連続けた橋の動的応答の解析には高次振動を無視することができず、どの振動周期が卓越的に起るかは、橋けたの固有周期と走行荷重の固有周期や橋面の凹凸のパワースペクトル密度によって決まるが、その解析には本論文の方法がよい。

一般に長大三径間連続けた橋の振動は基本振動とともに対称2次の振動が多く現れられる。また設計活荷重に対する設計動的係数は単純けた橋に関する解析結果をスパン長と動的係数との関係で整理した値を延長して用いてもよい。

(4) 150m以下の単純けた橋または連続けた橋やこれらの形式に類似なトラス橋等の道路橋の設計動的係数としては次式を用いることが合理的であると考ええる。

$$\left. \begin{array}{ll} i = 0.4 & 0 < \ell \leq 15 \text{ m} \\ i = 0.6 \times 10 / \ell & 15 \text{ m} < \ell \leq 150 \text{ m} \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

この設計動的係数を導くのに用いた仮定，例えば荷重列の車頭間隔を10m1種類としたこと，荷重の速度を1種類として速度の種類による影響を考慮しなかったこと，自動車および橋けたの振動模型の取り方や動的係数の標準値  $D_c$  および  $\overset{\text{最大値}}{D_{cm}}$  の取り方に多少の資料不足な点もあると考えられることなどから，今後さらにこの種の研究が進められることによって改良が加えられることが期待される。

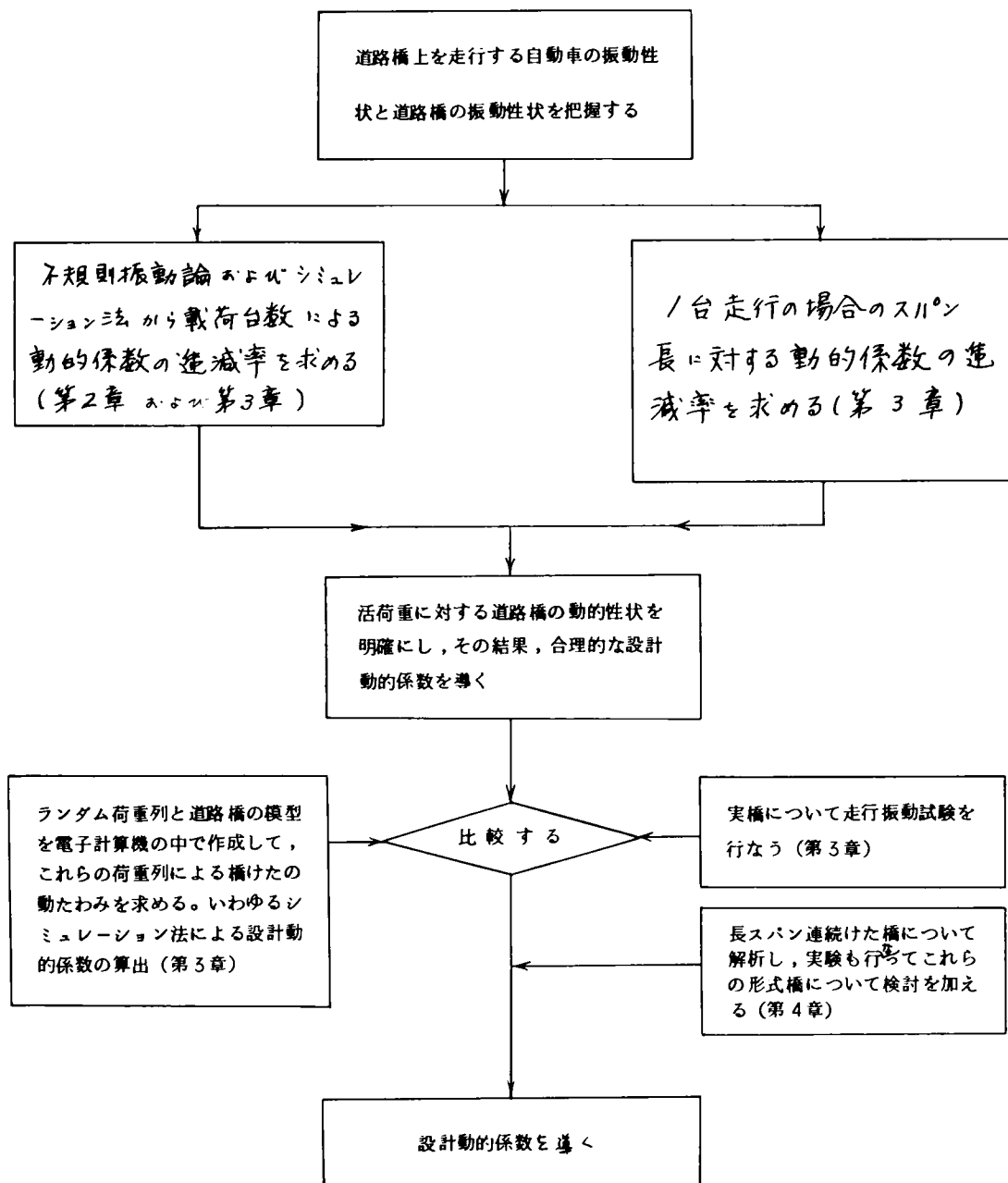


図 6・1 本論文の研究過程

## この論文の基礎となった論文

- 1) 小西一郎・山田善一・篠塚正宣・小堀為雄：橋の衝撃係数に関する確率論的一考察，土木学会論文集，No. 62，1/5，（昭34）。
- 2) 山田善一・小堀為雄：桁橋ヒンジにおける衝撃とその影響に関する研究，土木学会論文集，No. 105，1/7，（昭39）。
- 3) 小堀為雄・吉田博：電子計算機による自動車交通流模型の作成について，金沢大学工学部紀要，Vol. 3，No. 3，45/51，（昭39）。
- 4) 山田善一・小堀為雄：ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究，土木学会論文集，No. 119，1/9，（昭40）。
- 5) Kobori, Tameo : Study on Impact of Short Span Highway Bridge, Proc. of the 15<sup>th</sup> Japan National Congress for Applied Mechanics, 294/299, 1965.
- 6) 山田善一・小堀為雄：「けた橋の固有周期とその固有関数を求めるプログラムについて - Transfer Matrix 法 -」，土木学会誌，Vol. 52，No. 9，（昭42）．掲載予定。
- 7) 山田善一・小堀為雄：活荷重による道路橋の動的応答 - 衝撃係数 - に関する考察，土木学会論文集，投稿中（昭42.2）。

## 謝

## 辞

この論文は約十年間に亘る走行荷重と道路橋の振動問題に関する研究成果をまとめたもので、その長い年月の間終始ご指導下さいました京都大学教授 小西一郎博士、同助教授 山田善一博士に心から感謝の意を表します。また自動車関係の研究にご援助下さいました東京工業大学教授 近藤政市博士、まとめるに当ってご指導下さいました京都大学教授 後藤尚男博士や常に暖かくその機会をお与え下さいました金沢大学教授 喜内敏・柳場重正両博士に心から感謝の意を表します。

なお、この研究の計算および実験にご協力下さいました京都大学橋梁工学研究室、金沢大学構造力学研究室、建設省土木研究所構造研究室、同橋梁研究室、滋賀県道路課、富山県道路課、大阪市橋梁課その他関係者の方々や相関器の使用にあたってご協力下さいました京都大学路線施設学研究室の方々に感謝の意を表します。

# 付 録

## A.1 衝撃係数と動的係数について

道路橋という衝撃係数は走行荷重による動的効果のことであるから、衝撃係数というのは適当ではないと考えられる。このことから本論文では動的係数と呼ぶことにする。

さて、この動的係数のとり方について若干の考察を加えておく。

いま、図A.1のように力 $P$ が支点Aから支点Bに向って一定速度で移動しているとす。この場合、けたの動たわみ曲線 $y(t, x)$ は

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad (a)$$

と表わされる。

このときけたの運動方程式を表わす微分方程式は各モード別に作られて、

$$\ddot{A}_n + p_n^2 A_n = \frac{2P}{m\ell} \sin \frac{n\pi v t}{\ell} \quad (b)$$

と表わされ、その解は次式のように与えられる。

$$A_n = \frac{2P}{m\ell p_n^2} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\varrho_n^2}{p_n^2}} (\sin \varrho_n t + \frac{\varrho_n}{p_n} \sin p_n t) \right\} \quad (c)$$

ここに、 $\varrho_n = n\pi v / \ell$  である。もし測点 $x$ をスパン長の中点 $\ell/2$ にとれば式(a)からスパン中点の動たわみは、

$$\begin{aligned} y_d(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P}{m\ell p_n^2} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\varrho_n^2}{p_n^2}} (\sin \varrho_n t + \frac{\varrho_n}{p_n} \sin p_n t) \right\} \quad (d) \end{aligned}$$

となる。荷重がゆっくり前進する場合を考えると式(d)は、 $\varrho_n \ll p_n$ 、 $\varrho_n/p_n \rightarrow 0$  となり、

$$y_{d1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P}{m\ell p_n^2} \sin \varrho_n t \quad (e)$$

となる。この場合式(e)の $y_{d1}(t)$ は荷重がゆっくり前進した場合のスパン中点の静たわみの影響線を表わし、その最大値は荷重がスパン中点に載荷した時の静たわみを表わ

す。

いま、式( d )に注目すると  $P$  という荷重が各モードについてちょうど  $\{ \quad \}_n$  内の項だけ増加したと考えてもよい。このことから  $\{ \quad \}_n$  を荷重倍率  $(D.L.F.)_n$  という。

一方、一般に動たわみは 1 次モードのそれに比較して 2 次以上のモードによる動たわみは小さくこれを省略して、式( d )および式( e )は

$$y_d(t) = \frac{2P}{m\ell p_1^2} (D.L.F.)_1 \quad (f)$$

$$y_s = \frac{2P}{m\ell p_1^2} \quad (g)$$

と書かれる。さきに述べたように動的係数は荷重の動的割増し量を表わすのであるから、

$$(D.C.) = (D.L.F.)_1 - 1 = \frac{y_d}{y_s} - 1 \quad (h)$$

が動的係数を表わす。ただし  $(D.L.F.)_1$  の最大値をいう。また式( h )の  $y_d/y_s$  が動倍率に相当する。

なお、実際の記録について説明を加えておく。スパン中点の動たわみが図 A . 2 のように記録されたとしよう。この場合の荷重がゆっくり前進した場合のたわみの影響線は図の破線となる（この曲線が静たわみを表わす）。いま、自動車がある速度で走行した場合には橋げたは振動し、図 A . 2 の実線のような時間—動たわみ曲線が記録される。そこで静たわみ曲線の最大値を  $y_s$  とし、動たわみ曲線の最大値を  $y_d$  とするとこの  $y_d$  と  $y_s$  の比が動倍率であり、これより 1 を減じた値が動的係数である。

本論文では、動的係数および動倍率はこの定義に従っている。また記号としては動的係数を  $D_c$ 、動倍率を  $D_f$  でもって表わすことにする。すなわち

$$D_c = \frac{y_d}{y_s} - 1 = D_f - 1 \quad (i)$$



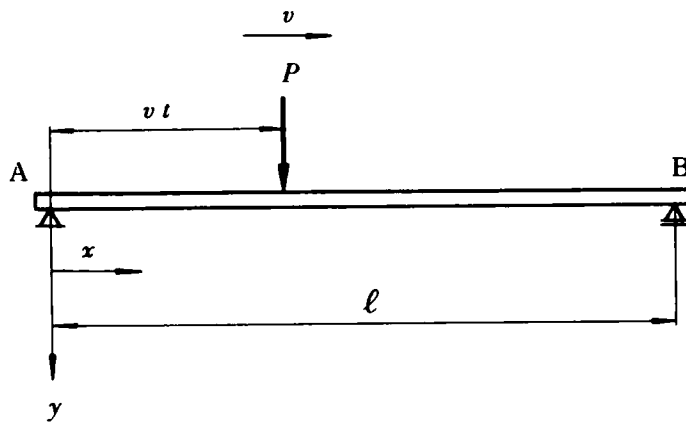


図 A・1

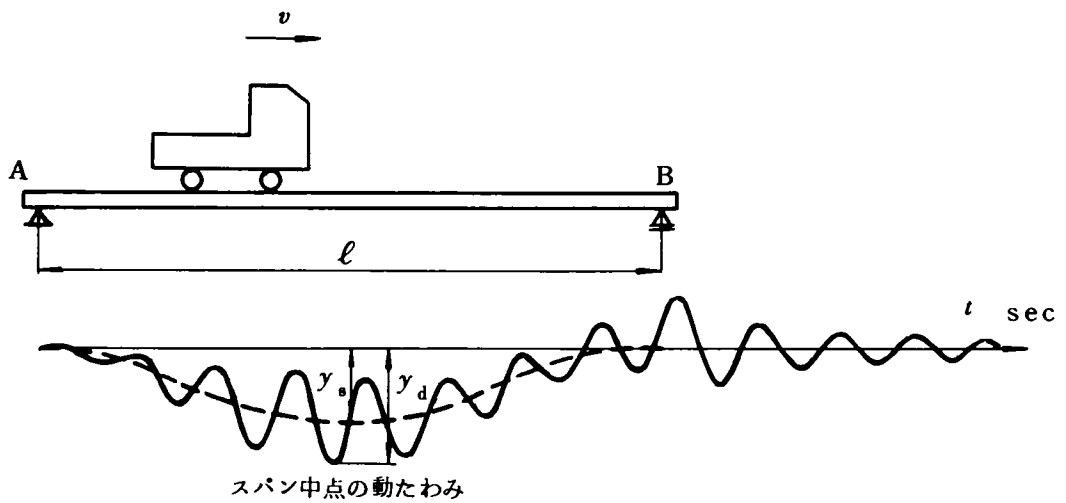


図 A・2 動的係数の説明図  
(振動記録の 1 例)

## A・2 走行自動車と橋けたの運動方程式 より 各変数間の関係を求める

走行自動車と橋けたの運動方程式は本文式( 2. 7 ) で表ら  
わされ、さらに  $y_x$ ,  $z$ ,  $z_T$  および  $z_0$  のフーリエ変換を  $Y_x$ ,  $Z$ ,  $Z_T$  および  $Z_0$  と  
して式( 2. 7 ) のフーリエ変換をとれば、

$$(M_E(j\omega)^2 + j c_E \omega + k_E + k_T + j c_T \omega) Y_c - (k_T - j c_T \omega) Z_T + (k_T + j c_T \omega) Z_0 = 0 \quad (a)$$

$$(m(j\omega)^2 + k_s + j c_s \omega) Z - (k_s + j c_s \omega) Z_T = 0 \quad (b)$$

$$\begin{aligned} & - (k_T + j c_T \omega) Y_c - (k_s + j c_s \omega) Z \\ & + \{m_T(j\omega)^2 + k_s + k_T + j \omega(c_s + c_T)\} Z_T \\ & - (k_T + j c_T \omega) Z_0 = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

そこで、

$$J_1(j\omega) = M_E(j\omega)^2 k_E + k_T + j \omega(c_E + c_T)$$

$$J_2(j\omega) = k_T + j \omega c_T$$

$$J_3(j\omega) = k_s + j \omega c_s$$

$$J_4(j\omega) = m(j\omega)^2 + k_s + j \omega c_s$$

$$J_5(j\omega) = m_T(j\omega)^2 + k_s + k_T + j \omega(c_s + c_T)$$

とすれば、式( a ), ( b )および( c )は

$$\left. \begin{aligned} J_1(j\omega) Y_c - J_2(j\omega) Z_T + J_2(j\omega) Z_0 &= 0 \\ J_4(j\omega) Z - J_3(j\omega) Z_T &= 0 \\ -J_2(j\omega) Y_c - J_3(j\omega) Z + J_5(j\omega) Z_T - J_2(j\omega) Z_0 &= 0 \end{aligned} \right\} (d)$$

となる。式 ( d ) 中、橋面の凹凸  $Z_0$  のフーリエ変換  $Z_0$  がわかっているものとすれば、未知数は  $Y_c$ 、 $Z$  および  $Z_T$  の3つとなり、式(d)を連立方程式として解いて  $Z_0$  との関係でその値を求めることができる。ここではクラメル公式およびサールの方法を用いて解く。

$$A = \begin{vmatrix} J_1(j\omega) & 0 & -J_2(j\omega) \\ 0 & J_4(j\omega) & -J_3(j\omega) \\ -J_2(j\omega) & -J_3(j\omega) & J_5(j\omega) \end{vmatrix} = J_1(j\omega)(J_4(j\omega)J_5(j\omega) - J_3^2(j\omega)) - J_2^2(j\omega)J_4(j\omega)$$

$$A_Y = \begin{vmatrix} -J_2(j\omega) & 0 & -J_2(j\omega) \\ 0 & J_4(j\omega) & -J_3(j\omega) \\ -J_2(j\omega) & -J_3(j\omega) & J_5(j\omega) \end{vmatrix} = J_2(j\omega)(J_3^2(j\omega) - J_4(j\omega) \cdot J_5(j\omega) + J_2(j\omega)J_4(j\omega))$$

$$A_Z = \begin{vmatrix} J_1(j\omega) & -J_2(j\omega) & -J_2(j\omega) \\ 0 & 0 & -J_3(j\omega) \\ -J_2(j\omega) & J_2(j\omega) & J_5(j\omega) \end{vmatrix} = J_2(j\omega)J_3(j\omega)(-J_2(j\omega) + J_1(j\omega))$$

から、 $Y_c$  および  $Z$  と  $Z_0$  との関係は

$$Y_c(j\omega) = \frac{A_Y}{A} = \frac{J_2(j\omega)(J_3^2(j\omega) - J_4(j\omega)J_5(j\omega) + J_2(j\omega)J_4(j\omega))}{J_1(j\omega)(J_4(j\omega)J_5(j\omega) - J_3^2(j\omega)) - J_2^2(j\omega)J_4(j\omega)} Z_0(j\omega) \quad (e)$$

$$Z(j\omega) = \frac{A_Z}{A} = \frac{J_2(j\omega)J_3(j\omega)(J_1(j\omega) - J_2(j\omega))}{J_1(j\omega)(J_4(j\omega)J_5(j\omega) - J_3^2(j\omega)) - J_2^2(j\omega)J_4(j\omega)} Z_0(j\omega) \quad (f)$$

となり、 $Y_c$  と  $Z$  との関係は、

$$Y_c(j\omega) = \frac{A_Y}{A_Z} = \frac{J_3^2(j\omega) - J_4(j\omega)J_5(j\omega) + J_2(j\omega)J_4(j\omega)}{J_3(j\omega)(J_1(j\omega) - J_2(j\omega))} Z(j\omega) \quad (g)$$

で表わされる。

ここに、 $Z_0(j\omega)$  または  $Z(j\omega)$  にかかっている係数を一般に伝達関数といい、 $H(j\omega)$  と表わす。すなわち、

$$H_{y_c z_0}(j\omega) = \frac{J_2(j\omega)(J_1^2(j\omega) - J_4(j\omega)J_3(j\omega) + J_2(j\omega)J_4(j\omega))}{J_1(j\omega)(J_4(j\omega)J_3(j\omega) - J_1^2(j\omega)) - J_2^2(j\omega)J_4(j\omega)} \quad (h)$$

$$H_{zz_0}(j\omega) = \frac{J_2(j\omega)J_3(j\omega)(J_1(j\omega) - J_2(j\omega))}{J_1(j\omega)(J_4(j\omega)J_3(j\omega) - J_1^2(j\omega)) - J_2^2(j\omega)J_4(j\omega)} \quad (i)$$

$$H_{y_c x}(j\omega) = \frac{J_1^2(j\omega) - J_4(j\omega)J_3(j\omega) + J_2(j\omega)J_4(j\omega)}{J_3(j\omega)(J_1(j\omega) - J_2(j\omega))} \quad (j)$$

さて、橋面の凹凸  $z_0$  のパワースペクトル密度を  $S_{z_0}(\omega)$  とし、自動車の振動  $z$  のパワースペクトル密度および橋げたの応答  $y_c$  のパワースペクトル密度をそれぞれ  $S_z(\omega)$  および  $S_{y_c}(\omega)$  として表わすと、これらのパワースペクトル密度の間の関係は

$$S_{y_c}(\omega) = \overline{H_{y_c z_0}(j\omega)} \cdot H_{y_c z_0}(j\omega) S_{z_0}(\omega) \quad (k)$$

$$S_z(\omega) = \overline{H_{zz_0}(j\omega)} \cdot H_{zz_0}(j\omega) S_{z_0}(\omega) \quad (l)$$

$$S_{y_c}(\omega) = \overline{H_{y_c x}(j\omega)} \cdot H_{y_c x}(j\omega) S_z(\omega) \quad (m)$$

として表わされる。

上の式 (h), (i), (j) および (k), (l), (m) はそれぞれ本文中の式 (2.14), (2.15), (2.16) および (2.17), (2.18), (2.19) に相当する。

A.3 走行荷重による道路橋の動的応答のパワースペクトル密度  $S_y(\omega)$  を求めるプログラム

```

      DIMENSION W1(50),SZO(50),A(5),B(5),F(5),BB(7),SMB(7),WMB(7)
      1,HY(50,7),SY(50,7)
      COMPLEX F,DD,DY
      PI=3.1416
      G=980.0
      READ (5,1000) VW,VMT,VC,VCT,VK,VKT,CA,CB,V,BB
      READ (5,1001) DW,M1
      WRITE (6,2000)
      DO 100 K=3,M1
      I=K-2
      W1(I)=DW*FLOAT(K)
      100 SZO(I)=CA/(W1(I))*(CB))
      M=M1-2
      VM=VW/G
      VMT=VMT/G
      1 DO 105 K=1,7
      105 SMB(K)=0.0
      READ (5,1002) BL,BW,EI
      IF (BL,EQ.0.0) GO TO 2
      BM=BW/G
      BM2=BM/2.0
      EI=EI*(10.0**10.0)
      DS=(VW+VMT)*BL**3.0/(48.0*EI)
      FR=(PI/BL)**2.0*SQRT(EI*BL/BM)
      VP=2.0*PI*V
      DO 101 L=1,M
      W=W1(I)*VP
      A(2)=VKT
      B(2)=VCT*W
      A(3)=VK
      B(3)=VC*W
      A(4)=VN*W**2.0+VK
      B(4)=VC*W
      A(5)=-VMT*W**2.0+VK+VKT
      B(5)=(VC+VCT)*W
      DO 102 J=2,5
      102 F(J)=SNGL(CMPLX(A(J),B(J)))
      DO 103 K=1,7
      BC=2.0*BB(K)*FR*BM
      A(1)=-BM2*W**2.0+VKT+EI*BL*(PI/BL)**4.0/2.0
      B(1)=(BC/2.0+VCT)*W
      F(1)=SNGL(CMPLX(A(1),B(1)))
      DD=F(1)*(F(3)-F(4)*F(5)/F(3))+F(2)*F(4)*F(2)/F(3)
      DY=-F(2)*((F(3)-F(4)*F(5)/F(3))+F(2)*F(4)/F(3))
      HY(I,K)=(DY*CONJG(DY))/(DD*CONJG(DD))
      SY(I,K)=HY(I,K)*SZO(I)/VP
      SB=SMB(K)
      SK=SY(I,K)
      IF (SB,GE,SK) GO TO 103
      SMB(K)=SK
      WMB(K)=W1(I)*V
      103 CONTINUE
      101 CONTINUE
      WRITE (6,2001) BL,FR,DS,V,SMB,WMB
      WRITE (6,2002)
      WRITE (6,2003) ((HY(I,K),K=1,7),I=1,M)
      WRITE (6,2004)
      WRITE (6,2005) ((SY(I,K),K=1,7),I=1,M)
      WRITE (6,2006)
      N=M-2
      H=DW*VP
      DO 200 K=1,7
      SUM=SY(1,K)
      IF(N.EQ.2) GO TO 12
      M2=N/2-1
      DO 210 I=1,M2
      N2=1+2*I
      N1=N2-1
      SUM=SUM+4.0*SY(N1,K)+2.0*SY(N2,K)
      210 CONTINUE
      N3=N+1
      12 S=H/3.0*(SUM+4.0*SY(N,K)+SY(N3,K))/(2.0*PI)
      DC=SORT(S)
      BE=BB(K)
      WRITE (6,2005) BE, S, DC
      200 CONTINUE
      GO TO 1
      1000 FORMAT (4F12.0/5F12.0/5F12.0/2F12.0)
      1001 FORMAT (F12.0,I4)
      1002 FORMAT (3F12.0)
      2000 FORMAT (1H ,20X,46H*** MAXMUM SPECTRUM OF DYNAMIC RESPONSE ****
      1 /// )
      2001 FORMAT (1H , 3HBL=E12.4,3HFR=E12.4,3HDS=E12.4,2HVB=E12.4 /
      19H** SMB **/7E12.4 /9H** WMB **/7E12.4 )
      2005 FORMAT (1H ,3E15.7)
      2002 FORMAT (1H , 8H** HY **)
      2003 FORMAT (1H , 7E12.4)
      2004 FORMAT (1H ,8H** SY **)
      2006 FORMAT (1H ,6X,7HDAMP.F. ,8X, 5HVARI. ,8X, 5HDEVI.)
      2 STOP
      END
```

A・4 乱数の発生とランダム荷重列の車頭間隔を作成するサブプログラム

```

C
SUBROUTINE RAN (N1,XN,THWO,THWM,THW )
SIMULATION OF RANDOM VEHICLES (HEADWAY)
INTEGER XN,RANDOM,RANSU,XN1,RANS
DIMENSION RANSU(5),THW(100)
DO 10 I=1,N1
DO 11 J=1,5
XN1 = XN*23
XN1 = MOD(XN1,100000001)
XN = XN1*23
XN = MOD(XN,100000001)
KKKA = XN1/1000000 - XN1/10000000*10
KKKB = XN/1000000 - XN/10000000*10
RANDOM = KKKA + KKKB
RANDOM = MOD(RANDOM,10)
11 RANSU(J) = RANDOM
RANS = 0
DO 12 J=1,5
12 RANS = RANS + RANSU(J)*10**(5-J)
P = FLOAT(RANS)/100000.0
THW(I) = THWO - (THWM - THWO)*ALOG(1.0 - P)
ITH = (THW(I) + 0.005)*100.0
ITH = ITH/2*2
10 THW(I) = FLOAT(ITH)/100.0
RETURN
END

```

A・5(a) 琵琶湖大橋の固有周期と固有関数を求めるメンバープログラム（〔FMB〕）使用例）

```

C      NATURAL FREQUENCIES AND MODES OF BIWAKO OHASHI BRIDGE
      DIMENSION FL(101),FI(101),FW(100),YM(6,100),WF(6,100)
      NSCA = 5HSIMPL
      NSCB = 5HSIMPL
      READ (5,1000) BL,FLS,N,NH,WS,WM,DW
      N1 = N+1
      N2 = NH+1
      READ (5,1001) (FI(I),I=1,NH)
      READ (5,1001) (FW(I),I=1,NH)
      DO 100 I=N2,N
      NN = N1-I
      FI(I) = FI(NN+1)
100    FW(I) = FW(NN)
      FI(N1) = FI(1)
      DO 101 I=1,N1
101    FL(I) = FLS
      WRITE (6,2000) BL,NSCA,NSCB
      WRITE (6,2001) (FI(I),I=1,N1)
      WRITE (6,2002)
      WRITE (6,2001) (FW(I),I=1,N)
      CALL PRINTA(N,FL,FW)
      CALL FMB(NSCA,NSCB,N,WS,WM,DW,FL,FI,FW,WF,YM,I3)
      WRITE (6,2003) (WF(I),I=1,I3)
      DO 103 I=1,I3
103    WF(I) = 1.0/WF(I)
      WRITE (6,2004) (WF(I),I=1,I3)
      DO 102 K=1,N
      WRITE (6,2005) K,(YM(I,K),I=1,I3)
102    CONTINUE
1000   FORMAT (2F12.0 / 2I4 / 3F12.0)
1001   FORMAT (5F12.0)
2000   FORMAT (1H // 19X 38H***** NATURAL FREQUENCIES AND MODES OF
127H BIWAKO OHASHI BRIDGE ***** /38X19H(BY SUBROUTINE FMB))//
214HBRIDGE LENGTH E15.7,2H M / 21HSUPPORTING CONDITION A5, 1H-
3A5 // 21H** INPUT DATA OF I ** )
2001   FORMAT (1H ,5E15.7)
2002   FORMAT (1H ,21H** INPUT DATA OF W **)
2003   FORMAT (1H1 // 20X 37H*** NATURAL FREQUENCIES AND MODES *** // 2X
13HN0. 13X 4H1-ST 11X 4H2-ND 11X 4H3-RD 11X 4H4-TH 11X 4H5-TH 11X
24H6-TH / 2X 3HCPS 1X 6E15.7 )
2004   FORMAT (1H ,6HPERIOD 6E15.7// )
2005   FORMAT (1H ,I6 ,6E15.7)
      STOP
      END

SUBROUTINE PRINTA(N,FL,FW )
      DIMENSION FL(70),FW(70)
      WRITE (6,3000)
      SL = 0.0
      JP = JP
      DO 100 K=1,N
      SL = SL+FL(K)
      FWK = FW(K)
      IF (FWK.GT.0.0) GO TO 100
      IF (FWK.EQ.0.0) GO TO 2
      IF (FWK.LE.1.0E+08) GO TO 3
      J1 = 1
      GO TO 4
5      WRITE (6,2000)
      GO TO 100
2      J1 = 2
      GO TO 4
6      WRITE (6,2003)
      GO TO 100
4      WRITE (6,2002) SL
      SL = 0.0
      GO TO (5,6,7),J1
3      J1 = 3
      GO TO 4
7      WRITE (6,2001)
100    CONTINUE
      SL = SL+FL(N+1)
      WRITE (6,2002) SL
3000   FORMAT (1H /5X 17H** SPAN LENGTH ** / )
2000   FORMAT (1H ,15HELASTIC SUPPORT )
2001   FORMAT (1H ,5HHINGE )
2002   FORMAT (1H ,E15.7 )
2003   FORMAT (1H ,14HSIMPLE SUPPORT )
      RETURN
      END

```

A.5.(b) 各種けた橋の固有周期と固有関数を求めるサブプログラム〔FMB〕

```

C SUBROUTINE FPN(NSCA,NSCB,N,WS,WL,DW,FL,FI,FW,WF,FM,IJ)
C NATURAL FREQUENCIES AND MODES OF GIRDER BRIDGE BY TRANSFER MATRIX
C METHOD
C SUPPORTING CONDITIONS ARE HINGED, FIX, FREE AND CONTINUOUS
C DIMENSION FL(101),FI(101),FW(100),FM(100),FU(4,4),A(4,4),WA(6,2),
1 W(6,2),Z(4,20),WF(6),YM(6,100)
2 IF (N.GT.100) GO TO 3
3 G = 980.0
4 FI = 5.1415923
5 E = 2100000.0
6 NSS = 5HSINPL
7 NSF = 5H FIX
8 NFF = 5H FREE
9 NI = N+1
10 SL = 0.0
11 SI = 0.0
12 SW = 0.0
13 NM = 0
14 NO K=1,N
15 SO = SL*PI(K)
16 ST = SW*PI(K)
17 FWK = FM(K)
18 IF (FWK.LE.0.0) GO TO 200
19 IF (FWK.LE.0.0) GO TO 200
20 SW = SW+FWK
21 NW = NW+1
22 CONTINUE
23 FLS = (SI+FI(N1))/FLOAT(N1)
24 FLS = (SI+FI(N1))/FLOAT(N1)
25 FWS = SW/FLOAT(NW)
26 FWS = SW/FLOAT(NW)
27 DO 201 K=1,N
28 DO 201 K=1,N
29 FL(K) = FL(K)/FLS
30 FI(K) = FI(K)/FIS
31 FWK = FM(K)
32 IF (FWK.GT.0.0) FM(K)=FM(K)/FWS
33 CONTINUE
34 FL(N1) = FL(N1)/FLS
35 FI(N1) = FI(N1)/FIS
36 MA = 3
37 NB = 0
38 IF (NSCA.EQ.NSS) MA = 1
39 IF (NSCA.EQ.NSF) MA = 4
40 IF (NSCA.EQ.NFF) MA = 6
41 IF (NSCB.EQ.NSS) NB = 1
42 IF (NSCB.EQ.NSF) NB = 4
43 IF (NSCB.EQ.NFF) NB = 6
44 J2 = 4
45 NJ = NA+NB
46 GO TO (1,8,1,1,1,1,1,9,1,10,1,2 ),NJ
47 8 J1 = 2
48 11 = 1
49 12 = 3
50 GO TO 12
51 9 J1 = 3
52 11 = 1
53 12 = 2
54 GO TO 12
55 10 J1 = 5
56 11 = 3
57 12 = 4
58 GO TO 12
59 11 J1 = 2
60 12 = 4
61 11 = 1
62 12 = 3
63 12 = 4
64 2 J1 = 3
65 12 = 4
66 12 = 1
67 12 = 2
68 12 = 2
69 DO 100 I=1,4
70 DO 100 I=1,4
71 PU(I,J) = 0.0
72 IF (I.EQ.J) PU(I,J)=1.0
73 CONTINUE
74 DO 101 I=1,4
75 DO 101 J=1,4
76 PU(I,J) = 1.0
77 IF (J.LE.1) PU(I,J)=0.0
78 CONTINUE
79 DO 101 I=1,4
80 PU(I,J) = 1.0
81 IF (J.LE.1) PU(I,J)=0.0
82 CONTINUE
83 W = W*2.0*W1
84 W = W*2.0*W1
85 L = 0
86 CALL S00000(J3,N,FL,FI,FW,WF,FU,PU,IL,I2,J1,I2,J2,OM,A,YM,L,Z,W2)
87 WA(13,1) = OM
88 W = W+DW
89 18 WE = W*2.0*W1
90 CALL S00000(J3,N,FL,FI,FW,WF,FU,PU,IL,I2,J1,I2,J2,OM,A,YM,L,Z,W2 )
91 FB = WA(13,1)*OM
92 IF (FB.LE.0.0) GO TO 15
93 WA(13,1) = OM
94 GO TO 16
95 15 WA(13,2) = OM
96 WE(13,1) = W-DW
97 WE(13,2) = W
98 I3 = I3+1
99 IF (I3.GE.7) GO TO 17
100 WA(13,1) = OM
101 IF (N.GT.WH) GO TO 17
102 W = W+DW
103 GO TO 18
104 I3 = I3-1
105 DO 104 K=1,I3
106 AA = WB(K,1)-WB(K,2)
107 AA = ABS(AA)
108 IF (AA.LE.0.001) GO TO 19
109 A1 = WA(K,1)
110 A2 = WA(K,2)
111 A1 = ABS(A1)
112 A2 = ABS(A2)
113 WK = A1*AA/(A1+A2)
114 W = WB(K,1)+WK
115 WE = W*2.0*W1
116 CALL S00000(J3,N,FL,FI,FW,WF,FU,PU,IL,I2,J1,I2,J2,OM,A,YM,L,Z,W2 )
117 FB = WA(K,1)*OM
118 IF (FB.LE.0.0) GO TO 20
119 WA(K,1) = OM
120 WB(K,1) = W
121 GO TO 21
122 20 WA(K,2) = OM
123 WB(K,2) = W
124 GO TO 21
125 19 WP(K) = W
126 CONTINUE
127 104 CONTINUE
128 CALCULATION OF MODES:
129 DO 105 K=1,I3
130 WE = WF(K)*2.0*+1
131 J3 = 0
132 L = 0
133 CALL S00000(J3,N,FL,FI,FW,WF,FU,PU,IL,I2,J1,I2,J2,OM,A,YM,L,Z,W2 )
134 J3 = J3+1
135 Z(J2,J3) = -A(11,11)/A(11,12)
136 Z(J3,J3) = 1.0
137 J3 = K
138 L = K
139 CALL S00000(J3,N,FL,FI,FW,WF,FU,PU,IL,I2,J1,I2,J2,OM,A,YM,L,Z,W2 )
140 CONTINUE
141 GO TO 4
142 1 WRITE (6,200C)
143 2000 FORMAT (1H ,36SUPPORTING CONDITION IS NOT ACCURATE )
144 GO TO 4
145 3 WRITE (6,2001)
146 2001 FORMAT (1H ,30HINPUT DATA N IS NOT ACCURATE )
147 4 RETURN
148 END

```



```

SUBROUTINE S00000(J3,N,FL,FI,FW,WE,FU,PU,I1,I2,J1,J2,OM,A,YM,L,Z,
1W2 )
DIMENSION FL(101),FI(101),FW(100),FU(4,4),PU(4,4),A(4,4),B(4,4),
1YM(6,100),Z(4,20)
J3 = 0
DO 100 I=1,4
A(I,J1) = FU(I,J1)
A(I,J2) = FU(I,J2)
100 CONTINUE
A(1,2) = A(1,2)*FL(1)
A(1,3) = A(1,3)*FL(1)**2.0/FI(1)
A(1,4) = A(1,4)*FL(1)**3.0/FI(1)
A(2,3) = A(2,3)*FL(1)/FI(1)
A(2,4) = A(2,4)*FL(1)**2.0/FI(1)
A(3,4) = A(3,4)*FL(1)
DO 102 K=1,N
DO 103 I=1,4
DO 103 J=1,4
B(I,J) = PU(I,J)
103 CONTINUE
FWK = FW(K)
IF (FWK.LE.0.0) GO TO 2
B(4,1) = WE*FW(K)
GO TO 3
2 CALL S00002(W2,J1,J2,FWK,A,B,PU,J3,Z )
GO TO 4
3 CALL S00001(A,B,J1,J2)
4 IF (L.EQ.0) GO TO 1
YM(L,K) = A(1,J1)*Z(J1,J3+1)+A(1,J2)*Z(J2,J3+1)
1 DO 104 I=1,4
DO 104 J=1,4
B(I,J) = FU(I,J)
104 CONTINUE
B(1,2) = B(1,2)*FL(K+1)
B(1,3) = B(1,3)*FL(K+1)**2.0/FI(K+1)
B(1,4) = B(1,4)*FL(K+1)**3.0/FI(K+1)
B(2,3) = B(2,3)*FL(K+1)/FI(K+1)
B(2,4) = B(2,4)*FL(K+1)**2.0/FI(K+1)
B(3,4) = B(3,4)*FL(K+1)
CALL S00001 (A,B,J1,J2)
102 CONTINUE
OM = A(I1,J1)*A(I2,J2)-A(I1,J2)*A(I2,J1)
RETURN
END

SUBROUTINE S00001(A,B,J1,J2)
DIMENSION A(4,4),B(4,4),C(4,4)
DO 100 I=1,4
J = J1
1 SUM = 0.0
DO 101 K=1,4
DO 101 K=1,4
101 SUM = SUM+B(I,K)*A(K,J)
C(I,J) = SUM
IF (J.EQ.J2) GO TO 100
J = J2
GO TO 1
100 CONTINUE
DO 102 I=1,4
A(I,J1) = C(I,J1)
A(I,J2) = C(I,J2)
102 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE S00002 (W2,J1,J2,FWK,A,B,PU,J3,Z )
MEAN SUPPORT AND HINGE
DIMENSION A(4,4),B(4,4),PU(4,4),Z(4,20)
IF (FWK.EQ.0.0) GO TO 1
IF (FWK.LE.1.0E+08) GO TO 2
ELASTIC SUPPORT
DO 100 I=1,4
DO 100 J=1,4
B(I,J) = PU(I,J)
100 CONTINUE
B(1,4) = FWK*W2
CALL S00001 (A,B,J1,J2)
GO TO 3
C SIMPLE SUPPORT
1 I3 = 1
I4 = 4
GO TO 4
C HINGE
2 I3 = 3
I4 = 2
4 J3 = J3+1
Z(J2,J3) = -A(I3,J1)/A(I3,J2)
Z(J1,J3) = 1.0
DO 101 I=1,4
A(I,J1) = A(I,J1)+A(I,J2)*Z(J2,J3)
A(I,J2) = 0.0
101 CONTINUE
3 A(I4,J2) = 1.0
3 RETURN
END

```

NATURAL FREQUENCIES AND MODES OF BIWAKO OHASHI BRIDGE  
(BY SUBROUTINE FMB)

INPUT DATA OF I

42269000.0	45192000.0	48840000.0	52116500.0	56554500.0
63257500.0	70782500.0	77116500.0	84514000.0	93043500.0
101123000.0	111487000.0	126913500.0	143141500.0	161356500.0
181458500.0	203662000.0	227478000.0	250121500.0	249580500.0
220616000.0	189243000.0	158656000.0	127331500.0	104112000.0
89487010.0	78568500.0	69650500.0	61164000.0	55636000.0
51793000.0	48579500.0	47007500.0		

INPUT DATA OF W

22140.0	22520.0	23547.0	23792.0	23667.0
25039.0	25537.0	25042.0	25415.0	26222.0
26160.0	26088.0	27677.0	28127.0	27857.0
29177.0	29677.0	29377.0	0.0	30017.0
28215.0	27825.0	26422.0	24652.0	25037.0
24745.0	23882.0	23747.0	24130.0	24080.0
23492.0	24052.0	24660.0		

NATURAL FREQUENCIES AND MODES

CFS PERIOD No.	1-ST	2-ND	3-RD	4-TH	5-TH	6-TH
1	0.687510	1.249573	1.618116	0.982551	0.972121	0.968723
2	1.454525	0.800274	0.618003	2.679740	4.273758	4.923821
3	0.993225	0.990966	0.989030	0.982551	0.273986	0.203094
4	1.947644	1.930370	1.915582	1.866303		
5	2.830029	2.775080	2.728183	2.573088		
6	3.612756	3.491190	3.387880	3.049849		
7	4.274064	4.054778	3.869423	3.271173		
8	4.800600	4.455033	4.164788	3.243123		
9	5.186389	4.692395	4.280444	2.996114		
10	5.428189	4.772585	4.230174	2.574407		
11	5.524929	4.705553	4.033456	2.028644		
12	5.479246	4.506456	3.715837	1.416139		
13	5.295556	4.193103	3.305774	0.793920		
14	4.980088	3.785283	2.833334	0.215505		
15	4.543184	3.305379	2.329402	-0.273807		
16	3.996990	2.775597	1.822709	-0.639553		
17	3.352868	2.215967	1.338367	-0.855902		
18	2.621634	1.644309	0.897809	-0.907015		
19	1.813294	1.076050	0.518740	-0.783450		
20	0.936871	0.524268	0.215513	-0.481508		
21	0.000000	-0.000003	0.000003	0.000009		
22	-0.991765	-0.487460	-0.118140	0.54534		
23	-2.031728	-0.932634	-0.140194	1.460165		
24	-3.113489	-1.328341	-0.066869	2.364294		
25	-4.228929	-1.665227	0.101116	3.319056		
26	-5.367026	-1.930698	0.362729	4.258014		
27	-6.511603	-2.110069	0.713099	5.095833		
28	-7.640044	-2.191141	1.138101	5.733388		
29	-8.724546	-2.166287	1.614478	6.082694		
30	-9.733326	-2.032221	2.112334	6.058540		
31	-10.630420	-1.789609	2.596526	5.605698		
32	-11.378480	-1.445663	3.028672	4.707058		
33	-11.943680	-1.016350	3.371519	3.402810		
34	-12.296850	-0.524749	3.592665	1.786891		
35	-12.417050	0.000009	3.669458	0.000018		
36	-12.296850	0.524767	3.592720	-1.786870		
37	-11.943680	1.016361	3.371623	-3.402828		
38	-11.378480	1.445673	3.028802	-4.707089		
39	-10.630410	1.789617	2.596684	-5.605759		
40	-9.733324	2.032227	2.112509	-6.058602		
41	-8.724554	2.166296	1.614668	-6.082543		
42	-7.640069	2.191153	1.138302	-5.735098		
43	-6.511642	2.110101	0.713330	-5.095488		
44	-5.367070	1.930732	0.362942	-4.257497		
45	-4.228972	1.665241	0.101279	-3.318229		
46	-3.113517	1.328372	-0.066717	-2.363423		
47	-2.031769	0.932676	-0.139998	-1.459267		
48	-0.991790	0.487479	-0.117938	-0.657253		
49	0.000009	-0.000004	0.000061	0.000330		
50	0.936885	-0.524265	0.215586	0.481839		
51	1.813313	-1.076038	0.518827	0.783801		
52	2.621663	-1.644287	0.897902	0.907383		
53	3.352901	-2.215938	1.338479	0.856318		
54	3.997029	-2.775560	1.822833	0.639810		
55	4.543228	-3.305330	2.329540	0.274299		
56	4.980138	-3.785230	2.833482	-0.214994		
57	5.295609	-4.193043	3.305926	-0.793407		
58	5.479302	-4.506392	3.715987	-1.415645		
59	5.524988	-4.705487	4.033600	-2.026196		
60	5.438249	-4.772520	4.230307	-2.574026		
61	5.186447	-4.692330	4.280560	-2.995118		
62	4.800654	-4.454970	4.164889	-3.242928		
63	4.274114	-4.054721	3.869512	-3.271084		
64	3.612800	-3.491149	3.387953	-3.049860		
65	2.830067	-2.775038	2.728230	-2.573215		
	1.947672	-1.930342	1.915609	-1.866486		
	0.993241	-0.990955	0.989027	-0.982665		